Violeta Alicia Nolberto Sifuentes

María Estela Ponce Aruneri

ESTADÍSTICA INFERENCIAL APLICADA

Unidad de Post Grado de la Facultad de Educación

de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Primera edición:
Lima, 2008.

Serie:
Textos de la Maestría en Educación.

Dedicatoria

Para Sandra Natalia (María Estela)

Para Ernesto Alonso (Violeta Alicia)

CONTENIDO

Capítulo 5. Análisis de regresión lineal múltiple

Capítulo 6. Pruebas de hipótesis no parámetricas

Capítulo 7. Análisis de datos categóricos

Anexo

PREFACIO

El presente libro se ha elaborado a solicitud de la Unidad de Post Grado de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, y tiene como objetivo ser una guía en el curso de Estadística Inferencial, que se desarrolla en el plan de estudios de la Maestría en Educación, en sus diferentes menciones.

Por tanto, se ha escrito tomando en cuenta a un grupo heterogéneo de profesionales, en el sentido de que los maestristas de esta facultad son en su mayoría de la especialidad de educación, y en su quehacer profesional no emplean cotidianamente las herramientas estadísticas. De ahí, que el esfuerzo de las autoras sea desarrollar paso a paso las aplicaciones que se presentan en este libro.

Los cálculos que se presentan para aplicar las herramientas de la inferencia estadística son para que los lectores entiendan sus cómo y porqué y, asimismo, la interpretación de los resultados obtenidos. Dejamos bien en claro que en ningún momento se pretende “adiestrar” a lo lectores en cálculos, sino en que aprendan los conocimientos teóricos estadísticos de la inferencia (saber), apliquen las herramientas estadísticas (saber hacer) y desarrollen una actitud positiva hacia la estadística. Esto es, que la estadística no solamente es cálculo, o el simple uso de las fórmulas o expresiones que aparecen en éste y en diversos libros de estadística, sino razonamiento crítico basado en evidencias objetivas que se obtienen de la población bajo estudio (ser).

Una vez que el lector haya asimilado los conocimientos estadísticos, y sus aplicaciones, que brindamos en el presente libro, estará en la capacidad de usar software estadístico, que es un instrumento comparable a una calculadora. El aprendizaje de estadística usando software estadístico no debe reducirse, sin embargo, a manipulaciones mecánicas, pues éste sirve como apoyo del profesor para mostrar, en forma precisa y rápida, los gráficos y cálculos estadísticos.

VIOLETA ALICIA NOLBERTO SIFUENTES

MARÍA ESTELA PONCE ARUNERI

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Elías Mejía Mejia, Director de la Unidad de Post Grado de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por brindarnos la oportunidad de entregar al mundo académico el presente libro, en particular a los maestristas de la mencionada facultad, que lo usaran como guía para el aprendizaje del Curso de Estadística Inferencial, en el plan de estudios vigente. También por considerarnos como docentes de tan prestigiada unidad de post grado.

A nuestros profesores de pregrado del Departamento Académico de Estadística de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, quienes nos formaron en tan importante especialidad, cuyas enseñanzas y exigencias académicas para con nuestra preparación profesional en estadística, han permitido que podamos seguir enseñando y difundiendo la estadística, no solo en el ámbito sanmarquino sino en otros.

A nuestros alumnos, por la paciencia e interés en aprender estadística, por sus comentarios y sugerencias para con nuestro desempeño docente.

A todos los lectores docentes, alumnos, empresarios, en general todos aquellos que tomaran decisiones basadas en evidencias objetivas, en concordancia con el mundo en que vivimos, caracterizado por el constante aprendizaje y el manejo adecuado de la información, en particular de la información estadística.

Asimismo a los que nos hagan llegar sus comentarios, observaciones y dudas respecto a lo tratado en el presente libro, los mismos que contribuirán con la enseñanza y la difusión de la estadística.

Finalmente a nuestras familias, por el apoyo, comprensión y aliento, para con el desarrollo del presente libro.

CAPÍTULO 1

LA ESTADÍSTICA Y SU RELACIÓN CON LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

1.1. INTRODUCCIÓN

Los profesionales de la Educación como parte de su quehacer profesional realizan investigación científica: evaluación de la calidad de la educación, someten a prueba diferentes métodos de comprensión lectora, estudian problemas del aprendizaje, entre otros. Es así, que contamos con Internet como fuente general de información, que permite disponer de información educativa, por ejemplo, sobre Evaluaciones Muestrales, que realiza el Ministerio de Educación y que se encuentra disponible en la página web: **www2.minedu.gob.pe/umc/index2.php?v_codigo=47&v_plantilla=2** (23.03.08) que a la letra dice:

> Dentro de las Evaluaciones Nacionales que ha realizado la Unidad de Medición de la Calidad (UMC) podemos distinguir dos tipos: las muestrales y las censales. A la fecha la UMC ha realizado cuatro evaluaciones muestrales y dos evaluaciones censales. En una evaluación muestral se selecciona a un conjunto de estudiantes de una población (objetivo). Las evaluaciones muestrales realizadas por la UMC son representativas de la población objetivo planteadas en los distintos estudios (p. e. estudiantes peruanos de sexto grado de primaria, estudiantes peruanos de Instituciones Educativas Estatales de quinto grado de secundaria, etc.). La selección de una muestra representativa de estudiantes permite hacer inferencias de las poblaciones a partir de la información recogida.

Para Castillo Arredondo (2003), evaluar:

> Es el acto de valorar una realidad que forma parte de un proceso cuyos momentos previos son la fijación de las características de la realidad a valorar y de la recogida de información sobre la misma, y cuyas etapas posteriores son la información y/o toma de decisiones en función del juicio de valor emitido.

Por tanto, si el educador desea evaluar el rendimiento escolar, es necesario conocer las características de esta realidad escolar, llamada estadísticamente, **población.** Si está en condiciones de recolectar los datos de toda la población se denomina **censo,** es decir datos de todos y cada uno de los escolares para lograr los objetivos propuestos, o por el contrario, si toma o selecciona un grupo de escolares, se denomina una muestra representativa (muestra probabilística o aleatoria) de escolares, y a través de la muestra intentará conocer la realidad de la población escolar.

Cuando se trabaja con una muestra probabilística y queremos conocer a la población, a partir de los datos muestrales, empleamos los métodos que ofrece la Estadística Inferencial, que en el presente libro nos ocupará varios capítulos.

Este libro es a nivel básico, tratando de ser lo más amigable posible, tomando en cuenta que nos dirigimos a profesionales no estadísticos, en particular de la Educación.

Amigable en el sentido que obviaremos las demostraciones matemático-estadísticas, pero si será necesario tomar en cuenta las definiciones de la estadística así como la rigurosidad para aplicar los métodos estadísticos de la inferencia.

Pero antes es necesario que se conozca la naturaleza de la Estadística en particular de la Estadística Inferencial.

1.2. DEFINICIÓN DE ESTADÍSTICA

Existen diversas definiciones, veamos algunas:

Para Sierra Bravo (1991), la Estadística es:

> La ciencia formada por un conjunto de teorías y técnicas cuantitativas, que tienen por objeto la organización, presentación, descripción, resumen y comparación de conjunto de datos numéricos, obtenidos de poblaciones en su conjunto de individuos o fenómenos o bien de muestras que representan las poblaciones estudiadas, asi como el estudio de su variación, propiedades, relaciones, comportamiento probabilístico de

> dichos datos y la estimación inferencia o generalización de los resultados obtenidos de muestras, respecto a las poblaciones que aquéllas representan**.** La Estadística en la investigación científica, dada la necesidad de manejar y tratar en ellas grandes cantidades, progresivamente crecientes, de datos.

Nocedo de León Irma, *et al* (2001), anotan que:

> La Estadística es la ciencia encargada de suministrar las diferentes técnicas y procedimientos que permiten desde organizar la recolección de datos hasta su elaboración, análisis e interpretación. Abarca dos campos fundamentales la Estadística Descriptiva y la Estadística Inferencial.

Para Hopkins y Glass, (1997): "La Estadística es un lenguaje para comunicar información basada en datos cuantitativos."

Montgmery, Douglas (1985), define a la Estadística como: "El arte de tomar decisiones acerca de un proceso o una población con base en un análisis de la información contenida en una muestra tomada de la población."

Otra definición de la Estadística que lo vincula al uso científico de principios matemáticos a la colección, al análisis, y a la presentación de datos numéricos. Contribuyen con la investigación científica diseñando pruebas y experimentos; la colección, el proceso, y el análisis de datos; y la interpretación de los resultados, aplicando conocimientos matemáticos y estadísticos. El conocimiento estadístico se aplica a la biología, economía, ingeniería, medicina, salud pública, psicología, comercialización, educación y deportes. Muchas decisiones económicas, sociales, políticas, y militares no se pueden tomar objetivamente sin el empleo adecuado de la estadística.

Traducción adaptada por las autoras del libro, tomada de:
www.amstat.org/Careers/index.cfm?fuseaction=main (01.04.08)

En nuestro medio profesional o en la sociedad en general se requiere solucionar un problema o verificar un supuesto, para desarrollar la ciencia, la técnica y la educación entre otros ámbitos; en particular respecto a los alumnos sobre rendimiento académico, aptitud científica, desarrollo social y la deserción entre otros. También respecto al docente sobre su desempeño en aula, su formación académico-profesional, los recursos didácticos que emplea y la producción científica, entre otros. Respecto al sistema educativo, financiamiento de la educación, gestión académica, informática educativa y modelos educativos, entre otros.

Todos estos problemas no pueden ser resueltos por iniciativas subjetivas, por pareceres o lluvia de ideas; sino en base a información valida y confiable, esto es, tener información lo más próximo a la realidad bajo estudio. Indudablemente esto se logra empleando la ciencia llamada **Estadística.**

Para resolver estos problemas se debe seguir de manera organizada, sistemática y planificada, es decir debemos realizar Investigación Científica.

1.3. INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

Es una forma especial de buscar el conocimiento, presenta toda una serie de características que la diferencian de otras formas de abordar la realidad, como son el conocimiento empírico espontáneo y el razonamiento especulativo. A continuaciones se presentan algunas definiciones:

Ezequiel Ander-Egg (1995), define investigación como:

> Un procedimiento reflexivo, sistemático, controlado y crítico, que permite descubrir nuevos hechos o datos, relación o leyes, en cualquier campo del conocimiento humano. Para entender qué se asume por investigación científica debemos conocer su naturaleza, sus aspectos o características, como son:

1. Es un procedimiento mediante el cual se recogen nuevos conceptos de fuentes primarias, una investigación existe cuando se ha pasado por el proceso de comprobación y verificación de un problema, el replantear lo ya conocido no se puede llamar investigación.

2. Una investigación es un aporte importante para el descubrimiento de principios generales por su naturaleza inferencial.

3. La investigación es un trabajo de exploración profesional, organizada o sistemática y exacta.

4. Es lógica y objetiva.

5. En lo posible procura ofrecer resultados cuantitativos de los datos manejados.

6. El fin de una investigación se expresa en un informe el cual presentará no solo la metodología, resultados, experimentaciones, sino también las conclusiones y recomendaciones finales.

1.4. OBJETIVOS FUNDAMENTALES DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

En relación a las funciones que realiza la ciencia, los objetivos fundamentales de una Investigación Científica son:

1. **Describir la realidad.** Proceso importante y necesario en el proceso del conocimiento científico donde las técnicas y métodos se aplican para recopilar datos y hechos, y establecer generalizaciones empíricas.

2. **Explicar la realidad.** Refleja mediante generalizaciones teóricas (principios, leyes, conceptos) las propiedades y regularidades esenciales y estables de los fenómenos, así como los factores causales que los determinan.

3. **Predecir la realidad.** La explicación de la realidad y las generalizaciones teóricas, permiten que cumpla con el objetivo de predecir los comportamientos futuros de los fenómenos, esto es, establecer pronósticos dentro de un determinado límite de la probabilidad.

Como función práctica y utilitaria, la ciencia transforma la realidad en correspondencia con las necesidades y demandas de la sociedad, a fin de lograr un bienestar, mejorar la calidad de vida.

Entonces la ciencia indaga su objeto de estudio utilizando de una manera sistemática y rigurosa, empleando métodos y medios especiales de conocimiento que permiten obtener datos empíricos confiables, así como un reflejo profundo y exacto de las regularidades esenciales de la realidad.

En este caso, los métodos estadísticos cumplen funciones cognoscitivas importantes como herramienta de investigación científica, por tanto el proceso de investigación científica encuentra su fundamento metodológico en la concepción científica general de la realidad objetiva. ¿Pero cómo conocer la realidad?

1.5. PARADIGMAS DE LA INVESTIGACIÓN

Un paradigma es un enfoque general que asume el investigador y es de carácter ontológico, epistemológico y metodológico. Este último tiene que ver con las vías, formas, procedimientos y estrategias que se consideran apropiados para estudiar al objeto, responde a la pregunta ¿Cómo se conoce a la realidad?

En la literatura del método científico se habla con frecuencia de dos paradigmas de la investigación científica, como son: el cualitativo y el cuantitativo.

Para sintetizar, estos dos paradigmas, se presenta la siguiente tabla, disponible en: **www.fisterra.com/mbe/investiga/cuanti_cuali/cuanti_cuali.asp** (22.03.08).

Tabla Nº 1.1

Ventajas y desventajas entre métodos cualitativos y cuantitativos

Métodos cualitativos	**Métodos cuantitativos**
Propensión a "comunicarse con" los sujetos del estudio.	Propensión a "servirse de" los sujetos del estudio.
Se limita a preguntar.	Se limita a responder.
Comunicación más horizontal (…) entre el investigador y los investigados (…) mayor naturalidad y habilidad de estudiar los factores sociales en un escenario natural.	
Son fuertes en términos de validez interna, pero son débiles en validez externa, lo que encuentran no es generalizable a la población.	Son débiles en términos de validez interna -casi nunca sabemos si miden lo que quieren medir-, pero son fuertes en validez externa, lo que encuentran es generalizable a la población.
Preguntan a los cuantitativos: **¿Cuán particularizables son los hallazgos?**	Preguntan a los cualitativos: **¿Son generalizables tus hallazgos?**

Podemos afirmar que como todo método científico, se debe reconocer sus ventajas y desventajas, lo importante es determinar el momento adecuado para aplicarlo en el desarrollo de la investigación científica.

Pero destacamos que el paradigma cuantitativo se vale de la Estadística para garantizar el estudio de muestras representativas y para el análisis de los datos, como también para efectuar generalizaciones a partir de los resultados de estas muestras representativas.

También, para realizar investigación vía el paradigma cuantitativo, se ha empleado previamente el paradigma cualitativo; pero lo importante es tener la certeza de su aplicación para solucionar problemas de una investigación científica, ésta debe reunir ciertas características.

En otros casos será necesario emplear ambos paradigmas, como por ejemplo cuando se trata de evaluar la Calidad de la Educación, en particular la Educación Superior, no es suficiente uno de ellos se deben emplear ambas. La realidad es muy compleja, multifactorial, dinámica, por lo tanto, ambos paradigmas se complementan, no son excluyentes.

Entonces la Estadística es la herramienta que ayuda a tener la seguridad, certeza y confianza de que los datos recogidos responden a la realidad que se pretende investigar, en términos de Estadística Aplicada.

Una vez establecido el objeto de estudio en base a los conocimientos teóricos, se inicia la etapa de Diseño Metodológico (Diseño), donde se define el proceso de recolección de datos, delimitando las unidades bajo estudio y las variables a medirse, que permitan contestar las preguntas formuladas, en el proyecto de investigación científica. Es indudable que, la Estadística es una poderosa herramienta para planificar y desarrollar el Diseño Metodológico.

Los datos obtenidos, de la realidad investigada, se analizan aplicando los métodos y técnicas estadísticas para contrastar sus posibles divergencias con las consecuencias que se deducen de las hipótesis. Por tanto nos preguntamos:

¿Cómo se llevará a cabo el estudio para investigar sobre diferentes problemas y aristas del trabajo educativo, para el logro de sus objetivos y/o verificación de sus hipótesis?
¿Cómo se realizará la investigación, a fin de maximizar la validez y confiabilidad de la información y reducir errores en los resultados?

Las respuestas que ustedes proporcionen dejan notar la relación que existe entre Estadística e Investigación Científica.

1.6. CLASIFICACIÓN DE LA ESTADÍSTICA

Dependiendo de cómo se analizan los datos, la Estadística se clasifica como:

1.6.1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Rama de la Estadística que trata sobre la descripción y análisis estadístico de una población, que resumen y presenta datos obtenidos de la población o de una muestra, mediante métodos adecuados.

Tiene como objetivo, caracterizar los datos, de manera gráfica o analítica, para resaltar las propiedades de los elementos bajo estudio.

La siguiente pregunta: ¿En promedio el número total de respuestas correctas, de una prueba de compresión lectora, es la misma en todas las secciones de quinto grado de primaria de Instituciones Educativas de Lima Metropolitana?, se resuelve con el apoyo de la Estadística Descriptiva.

1.6.2. ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Rama de la Estadística que estudia el comportamiento y propiedades de las muestras y la posibilidad, y límites, de la generalización de los resultados obtenidos a partir de aquellas a las poblaciones que representan. Esta generalización de tipo inductivo, se basa en la **probabilidad.** También se le llama también Estadística Matemática, por su complejidad matemática en relación a la Estadística Descriptiva.

Tiene como objetivo, generalizar las propiedades de la población bajo estudio, basado en los resultados de una muestra representativa de la población.

La siguiente pregunta: ¿El instrumento **Perso,** clasifica y discrimina adecuadamente, a partir de variables de personalidad, a los alumnos de Educación Básica Secundaria según requieran o no una escolarización especial? se resuelve con el apoyo de la Estadística Inferencial.

En cuanto a la Probabilidad, Juez Martel, Pedro y Diez Vegas, Francisco Javier (1997), manifiestan que: “Hoy en día la Probabilidad y la Estadística, íntimamente unidas en sí, desempeñan un papel fundamental en prácticamente todos los campos del saber, tanto en las ciencias naturales como en las ciencias humanas, papel que va cobrando cada vez mayor importancia.”

La siguiente pregunta: ¿Cuánto es la probabilidad de que un alumno de Educación Básica Secundaria requiera una escolarización especial, a partir de las variables de su personalidad? es un caso típico que se resuelve con el apoyo de la probabilidad y se logra empleando modelos probabilísticos.

RECUERDE

Ningún método estadístico puede corregir los defectos por una inadecuada selección del problema que se investiga, o por una mala recolección de datos. Una investigación que empieza mal, con seguridad termina mal.

CON DATOS DE MALA CALIDAD, NO SERÁ POSIBLE DAR RESPUESTA ADECUADA A UN PROBLEMA CIENTÍFICO

Nosotros recordamos al estudiante que los métodos estadísticos son las herramientas más peligrosas en manos de gente inexperta. Pocas materias tiene una aplicación tan amplia; Ninguna requiere tal cuidado en su aplicación.

La estadística es una de esas ciencias cuyos adeptos deben ejercer la automoderación de un artista.

George Udny Yule y Maurice Kendal

CAPÍTULO 2

ESTADÍSTICA INFERENCIAL

2.1. INTRODUCCIÓN

También se le llama Inferencia Estadística, pero previamente recordemos que la Estadística (EI) comprende el conjunto de métodos estadísticos que permiten deducir (inferir) cómo se distribuye la población bajo estudio a partir de la información que proporciona una muestra representativa, obtenida de dicha población. Ver sección 1.6.2 del presente libro.

Para que la Estadística Inferencial proporcione buenos resultados debe:

1. Basarse en una técnica estadístico-matemática adecuada al problema y suficientemente validada.

2. Utilizar una muestra que realmente sea representativa de la población y de un tamaño suficiente.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1

Se realiza un estudio para comparar tres métodos para enseñar técnicas de comprensión lectora en inglés a escolares de segundo grado de Educación Básica Secundaria, como son:

- El método de la enseñanza recíproca.
- El método de instrucción directa.
- La combinación de métodos de instrucción directa y enseñanza recíproca.

Las preguntas por resolver son:

1. ¿Cuál de los métodos mejora la comprensión lectora?

2. ¿Para el próximo año el método identificado como el mejor, dará buenos resultados, para el alumno Javier Hernández León, quién realizará el segundo grado de Educación Básica Secundaria?

La primera pregunta es un caso de incertidumbre, porque, basándonos en el estudio de tres muestras independientes y en igualdad de condiciones se aplicará uno de los tres métodos a cada muestra de manera independiente; con el apoyo de la Estadística Inferencial absolvemos esta pregunta, eligiendo a la que mejora significativamente la Comprensión Lectora, para este tipo de alumnos.

La segunda pregunta es un caso de toma de decisiones, porque Javier Hernández León no ha participado en el estudio, pero se le aplicará el mejor método que resulte de la investigación realizada, ahora bien, con qué confianza, diremos que ese método logrará que Javier mejore su comprensión lectora en inglés.

Los casos de incertidumbre y toma de decisiones son resueltos por la Estadística Inferencial, por supuesto apoyado por la probabilidad.

Para iniciarse en el estudio y aplicación de la Estadística Inferencial es necesario conocer los conceptos básicos que a continuación se van a tratar.

2.2. POBLACIÓN

Este concepto vamos a definir bajo diferentes enfoques. En investigación científica se le define como la totalidad de elementos sobre los cuales recae la investigación. A cada elemento se le llama unidad estadística, ésta se le observa o se le somete a una experimentación, estas unidades son medidas pertinentemente.

Si representamos mediante, X, una variable aleatoria bajo investigación, al estudiar a esta variable en la población, como resultado tendremos los valores:

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_N$$

Donde N es el total de elementos de la población.

Ejemplo 2.2

Sea X, una variable aleatoria que representa la calificación obtenida en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental (escala vigesimal), de los alumnos de la Facultad de Educación, si la población consta de 300 alumnos, entonces:

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_{300}$$

Es una población en términos de variable aleatoria, que se lee así:

La calificación que ha obtenido el alumno 1 en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental, la calificación que ha obtenido el alumno 2 en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental, la calificación que ha obtenido el alumno 3 en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental, y así sucesivamente hasta la calificación que ha obtenido el alumno 300 en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental.

El propósito de un estudio estadístico es extraer conclusiones acerca de la naturaleza de la población, pero resulta que las poblaciones son grandes o por razones de ética, recursos financieros, metodológicos u otros no será posible entonces se debe trabajar con una muestra extraída de la población bajo estudio.

2.3. MUESTRA

Sierra Bravo (1991) anota que: "Una muestra en general, es toda parte representativa de la población, cuyas características debe reproducir en pequeño lo más exactamente posible."

Para que sea representativa se debe seleccionar empleando el muestreo, tópico importante de la Estadística, con la finalidad de que los resultados de esta muestra sean validos para la población de la que sea obtenido la muestra. Esta generalización se realiza empleando la estadística inferencial.

2.4. MUESTRA ALEATORIA

Una muestra aleatoria de tamaño n de la función de distribución de la variable aleatoria X es una colección de n variables aleatorias independientes $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ cada una con la misma función de distribución de la variable aleatoria X.

Ejemplo 2.3

Consideremos nuevamente la población definida en el ejemplo 2.2, la variable de interés es X, calificación obtenida en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental (escala vigesimal), de los alumnos de la Facultad de Educación. Asumiéremos que tiene distribución de probabilidad con media μ_x y Varianza σ_x^2. No se conoce ni la distribución exacta de X ni el valor numérico de μ_x o de σ_x^2. Se trata de características de la población que pueden determinarse con precisión si se revisa cada una de las calificaciones de los 300 alumnos. Para tener una idea del valor de μ_x se extrae una muestra aleatoria de tamaño n = 6 de la población. Entonces:

X_1 : La calificación que ha obtenido en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental, el primer alumno seleccionado en la muestra.

X_2 : La calificación que ha obtenido en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental, el segundo alumno seleccionado en la muestra.

…

X_6 : La calificación que ha obtenido en la prueba de conocimientos sobre educación ambiental, el sexto alumno seleccionado en la muestra.

Puesto que la selección de los alumnos, en este caso es seis, es aleatoria o al azar:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$$

Constituye variables aleatorias. Se admite que son independientes y cada una con la misma distribución que la variable aleatoria *X*. En un sentido matemático el término muestra aleatoria, se refiere, no a seis alumnos seleccionados para este estudio sino a las seis variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ asociadas con los alumnos.

La definición matemática de variable aleatoria es teórica, para extraer conclusiones prácticas acerca de la población en base a la muestra seleccionada deben determinarse los valores numéricos de las variables $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$.

No estamos tratando con un conjunto de unidades estadísticas seleccionadas, ni con un grupo de variables teóricas sino con un conjunto de *n* números reales, es decir $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Estos números son los valores observados de las variables $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ respectivamente, para una determinada muestra aleatoria extraída de la población. Esto conduce a la siguiente definición.

2.5. MUESTRA ALEATORIA APLICADA

Una muestra aleatoria de tamaño n es un conjunto de *n* observaciones $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ sobre las variables $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ independientes e idénticamente distribuidas.

Ejemplo 2.4

Para el caso del ejemplo 2.3, una vez identificados los seis alumnos, podemos determinar los valores numéricos de las seis variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$. Supongamos que el primer alumno seleccionado ha obtenido 13 en la prueba de educación ambiental en este caso, la variable aleatoria X_1 toma el valor x_1 = 13.

Si el segundo alumno seleccionado ha obtenido 10 en la prueba de educación ambiental en este caso, la variable aleatoria X_2 toma el valor x_2 = 10. De igual forma las variables aleatorias X_3, X_4, X_5, X_6 tomarán valores numéricos que van a depender de las calificaciones que obtienen los alumnos seleccionados en tercera, cuarta, quinta y sexta selección.

Ahora estamos utilizando el termino muestra aleatoria no para referirnos a los alumnos seleccionados o a las variables aleatorias asociados con ellos sino a los seis valores numéricos $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ que toman respectivamente cada una de las seis variables aleatorias.

Por tanto hay tres formas de considerar a una muestra aleatoria:

1. Como un conjunto de unidades seleccionadas y que son sometidos al estudio.

2. Como un conjunto de variables aleatorias teóricas asociadas con esas unidades

3. Como un conjunto de valores numéricos tomadas por las variables.

Las definiciones no son equivalentes pero están estrechamente relacionadas.

2.6. PARÁMETRO

Sierra Bravo (1991) indica que parámetro deriva del vocablo griego *parámetreo* que significa medir una cosa con otra:

> En estadística se refiere a los valores o medidas que caracterizan una población como por ejemplo la media y la desviación típica de una población (…) Son cantidades indeterminadas constantes o fijas respecto a una condición o situación que caracteriza a un fenómeno en un momento dado que ocurre en una población.

Se suele representar a un parámetro mediante letras griegas, por ejemplo la media poblacional se representa mediante μ_x y se lee como media poblacional de la variable aleatoria *X*, la varianza poblacional se representa mediante σ_x^2 y se lee como varianza poblacional de la variable aleatoria *X*.

En términos prácticos un parámetro es un valor que resulta al emplear los valores que se obtiene de una población.

Ejemplo 2.5

Si al obtener las calificaciones de los 300 alumnos que conforman la población, estos se promedia, entonces μ_x = 14.78 es el parámetro correspondiente. Para su cálculo se ha empleado la siguiente expresión, llamada media poblacional:

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \quad (2.1)$$

Obviamente que *N* toma el valor 300, para este ejemplo.

Si de estos 300 alumnos 198 son mujeres, entonces la proporción poblacional de mujeres representada por π_x = 0.66 (66%). Para su cálculo se ha empleado la siguiente expresión, llamada proporción poblacional:

$$\pi_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \quad (2.2)$$

Pero ahora la variable aleatoria se define como:

$$X_i = \begin{cases} 1 & si \;\; alumna \\ 0 & si \;\; alumno \end{cases}$$

En este caso el numerador de la expresión (2.2) es 198 y *N* toma el valor 300.

2.7. ESTADÍSTICO

Se contrapone al parámetro, porque es un valor que se obtiene a partir de los valores muestrales, se puede obtener media y varianzas muéstrales, por ejemplo.

Los estadísticos son variables aleatorias por que están sujetos a la fluctuación de la muestra en relación al valor poblacional que se asume es constante.

Ejemplo 2.6

Continuando con el ejemplo 2.4, al seleccionar una muestra aleatoria de tamaño seis, una vez identificados los seis alumnos, obtienen las siguientes calificaciones x_1 = 13, x_2 = 10, x_3 = 13, x_4 = 14, x_5 = 11, x_6 = 10 la media obtenida de los seis alumnos es de 11,83, llamada media muestral y se representa mediante $\overline{x}$, cuya expresión es:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (2.3)$$

El numerador de la expresión (2.3) es la suma de los seis valores, que da 71, que dividido por 6, resulta $\overline{x}$ = 11,83, es decir en promedio los alumnos han obtenido 11,83 de calificación en la prueba de educación ambiental.

La varianza de esta muestra aleatoria es 2,4722 y se representa mediante S^2, cuya expresión es:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n} \quad (2.4)$$

Para su cálculo, disponemos de la tabla, 2.1, en la que mostramos paso a paso el uso de la expresión (2.4) sabiendo que $\overline{x}$ = 11,83:

Tabla 2.1

Cálculos para obtener el valor de la varianza (ejemplo 2.6)

Unidad	x_i	$\left(x_i - \overline{x}\right)$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
1	13	1,17	1,3689
2	10	-1,83	3,3489
3	13	1,17	1,3689
4	14	2,17	4,7089
5	11	-0,83	0,6889
6	10	-1,83	3,3489
Total	71	0,02*	14,8334

Teóricamente:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right) = 0$$

El numerador de la expresión (2.4) es la suma del cuadrado de las seis desviaciones de cada valor que toma la variable, respecto a su media aritmética, que es igual a 14,8334, que dividido por 6 es justamente 2,4722.

La raíz cuadrada, positiva, de la varianza se llama desviación estándar o desviación típica, esto es:

$$S = +\sqrt{S^2} \qquad (2.5)$$

Entonces, usando la expresión anterior (2.5) la desviación estándar es S = 1,5723.

2.8. DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

Sierra Bravo (1991) anota que la distribución muestral:

> Está formada por estadísticos o valores determinados obtenidos de muestras: medias, varianzas, etc., acompañados de sus respectivas frecuencias relativas o probabilidades, o de la proporción de veces que se repiten en el conjunto de todas las muestras posibles del mismo tamaño obtenidas de la población.

De manera más formal, Tsokos y Milton (1998) anotan que: "(…) la distribución de probabilidad del estadístico se llama distribución muestral."

Ejemplo 2.7

Vamos a obtener la distribución muestral de las calificaciones obtenidas en la prueba que mide la educación ambiental de una población hipotética compuesta por 3 estudiantes y que toman calificaciones iguales a: X_1 = 13, X_2 = 11, X_3 = 07. Fijamos para una muestra de tamaño 2, en la tabla 2.2 se muestra los posibles resultados de la muestra de tamaño 2, así como su respectiva media muestral:

Tabla 2.2

Resultados de posibles muestras de tamaño 2

Muestras Posibles	**Medias muestrales (media para cada muestra)**
13,11	12
13,7	10
11,13	12
11,7	9
7,13	10
7,11	9

Ahora se muestra la distribución de frecuencias para los valores de la media muestral:

Tabla 2.3

Distribución muestral de la media muestral

Valor de las medias muestrales	**Frecuencia**	**Frecuencia relativa**
9	2	2/6 = 0.33
10	2	2/6 = 0.33
12	2	2/6 = 0.33

La distribución muestral de la media muestral es la distribución de frecuencias o de probabilidad, en este caso, de las frecuencias relativas de todas las medias muestrales posibles, obtenidas de muestras de tamaño 2, de la población de tamaño 3.

Por cultura estadística estudiaremos algunos estadísticos y su distribución de probabilidad (distribución muestral).

2.8.1. MEDIA MUESTRAL

La expresión (2.3), nos indica cómo se obtiene una media muestral. Veamos sus propiedades:

PROPIEDADES DE LA MEDIA MUESTRAL

Si X es una variable aleatoria con esperanza o media poblacional μ y varianza poblacional σ^2, entonces la media muestral, $\bar{x}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $E(\bar{x}) = \mu$

2. $V(\bar{x}) = \sigma^2 / n$

3. La desviación estándar de $\bar{x}$, que se representa mediante $\sigma_{\bar{x}}$, conocida también como error estándar de la media muestral es igual a $\sigma / \sqrt{n}$

4. Sea $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ una muestra aleatoria de tamaño *n*, de una distribución con media poblacional μ y varianza poblacional σ^2. Entonces para *n* grande, la variable aleatoria:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad (2.6)$$

Se distribuye aproximadamente como una normal estandarizada $N(0,1)$. Se considera una buena aproximación cuando $n \geq 30$ (Teorema del Límite Central). De este modo, incluso aún cuando la variable aleatoria X no está normalmente distribuida, podemos aplicarla en la Inferencia Estadística.

2.8.2. VARIANZA MUESTRAL

A partir de cada muestra aleatoria de tamaño n de X : $x_1, x_2, ..., x_n$ también se puede calcular la varianza muestral, definida como:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 \qquad (2.7)$$

Cabe precisar, que algunos autores la llaman **cuasivarianza.**

PROPIEDADES DE LA VARIANZA MUESTRAL

Si X es una variable aleatoria con esperanza y varianza μ y σ^2 respectivamente, entonces para la varianza muestral de tamaño n se cumple que:

1. $E\left(s^2\right) = \sigma^2$

2. Si X tiene distribución de probabilidad normal, $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ es una variable aleatoria con distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad.

2.8.3. PROPORCIÓN MUESTRAL

Consideremos una población en la que existe una proporción π de elementos que tienen el atributo A (o pertenecen a la categoría A).

Si se toma una muestra aleatoria de n elementos, de esa población y se calcula el número n_A de elementos con el atributo A, entonces:

$$p = \frac{n_A}{n} \qquad (2.8)$$

Es la proporción muestral de los elementos que tienen el atributo A en la muestra, esta proporción muestral corresponde a una variable aleatoria.

PROPIEDADES DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL

1. $E(p) = \pi$

2. $V(p) = \pi(1-\pi)/n$

La desviación estándar o error estándar de la proporción muestral, se denota como σ_p y es igual a $\sqrt{\pi(1-\pi)/n}$

3. Para n suficientemente grande, la variable aleatoria:

$$Z = \frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \quad (2.8.)$$

Se distribuye aproximadamente como una $N(0,1)$. Se considera una buena aproximación cuando $n \geq 30$ (Teorema del Límite Central).

¿CUÁL ES LA DIFERENCIA ENTRE DESVIACIÓN ESTÁNDAR Y ERROR ESTÁNDAR?

La diferencia es que la **desviación estándar** describe la variabilidad de los valores de una variable, en cambio el **error estándar** describe la precisión del estadístico.

Ejemplo 2.8

En una muestra aleatoria de 15 docentes de educación secundaria, de la Institución Educativa Martín Adán, se les aplico un cuestionario para recoger su opinión sobre el investigador educativo, se presenta la respuesta de 3 preguntas, de un total de 27:

Tabla 2.4

Muestra aleatoria de 15 docentes de la Institución Educativa "Martín Adán" (Lima)

Docentes	**Edad (1)**	**Investigador (2)**	**Remuneración (3)**
1	34	1	1
2	38	1	1
3	49	2	1
4	42	1	1
5	35	1	2
6	44	2	1
7	30	1	2
8	36	1	1
9	43	2	1
10	47	2	1
11	39	1	2
12	46	2	1
13	48	2	1
14	36	1	2
15	44	1	1

(1) Edad en años cumplidos del docente.

(2) La profesión de investigador es profesión atractiva para:
1. Docentes jóvenes. 2. Docentes maduros.

(3) El investigador educativo debe ser bien remunerado
1. Sí. 2. No.

Con esta información vamos a mostrar la diferencia entre desviación estándar y error estándar.

MEDIA MUESTRAL

La edad en años cumplidos tiene distribución con media poblacional, μ = 38,5 años y varianza poblacional, σ^2 = 30 años^2.

Usando la expresión 2.3 se obtiene $\bar{x}$ = 40,73 años, y al usar la expresión 2.7 se obtiene s^2 = 33,21 años^2.

Por tanto la desviación estándar muestral de la edad es: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{33,21}$ = 5,76.

En cambio el error estándar del estadístico media muestral, empleando la propiedad 3, es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5,48}{\sqrt{15}} = \frac{5,48}{3,87} = 1,42 \text{ años}$$

PROPORCIÓN MUESTRAL

Para la segunda variable, interesa que el docente encuestado indique que la profesión de investigador es una profesión atractiva para docentes jóvenes (A). La muestra aleatoria es igual a 15 docentes $(n = 15)$.

En esta población se asume que la proporción poblacional de docentes que consideran que la profesión de investigador es una profesión atractiva para docentes jóvenes es igual a 0,71 $(\pi = 0,71)$.

De la tabla contamos que n_A = 9, es decir, 9 docentes afirman que la profesión de investigador es una profesión atractiva para docentes jóvenes, entonces empleando la expresión 2.8 se obtiene:

$$p = \frac{9}{15} = 0,6 \ (60\%)$$

Esto es, el 60% de docentes encuestados afirman que la profesión de investigador es una profesión atractiva para docentes jóvenes.

El error estándar del estadístico p es:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}71(1-0{,}71)}{15}} = \sqrt{\frac{0{,}71(0{,}29)}{15}} = \sqrt{\frac{0{,}2059}{15}} = \sqrt{0{,}0137} = 0{,}1170$$

2.9. ESTIMACIÓN

La Inferencia Estadística se clasifica como: Estimación y Prueba de Hipótesis de parámetros estadísticos. En ambos casos hay una población bajo investigación y generalmente al menos un parámetro de esta población, al que vamos a representar mediante la letra griega θ.

Cuando no se tiene una noción preconcebida sobre el valor de θ, se desea responder a la pregunta: ¿Cuál es el valor de θ?

En este caso el intentar conocer el valor de θ es en termino estadísticos, estimar el valor de θ es decir tratar de conocer el valor del parámetro en términos prácticos.

Sierra Bravo (1991) anota que:

> Estimación proviene del latín *estimatio* y significa estimación, precio y valor que se da a una cosa. En estadística es la operación que mediante la inferencia un parámetro, utilizando datos incompletos procedentes de una muestra, se trata de determinar el valor del parámetro. Pero los valores de la muestra están sujetos al error muestral esto es a las fluctuaciones de la muestra.

La estimación de un parámetro puede ser, mediante una:

1. Estimación puntual.

2. Estimación mediante intervalos de confianza.

Para cualquiera de estas dos situaciones empleamos el estadístico que como ya se ha mencionado es una variable aleatoria.

La aproximación se hace utilizando estadísticos apropiados. A un estadístico empleado para aproximar o estimar un parámetro de la población θ se le llama estimador puntual de θ y se denota mediante $\hat{\theta}$. De este modo por ejemplo, al estimador de la media μ, se le denotara por $\hat{\mu}$. Una vez que la muestra ha sido tomada y se han hecho algunas observaciones, se puede obtener el valor numérico del estadístico $\hat{\theta}$. A tal número se le denomina una estimación puntual de θ. Nótese que hay una diferencia entre los términos estimador y estimación.

ESTIMADOR: Es el estadístico utilizado para generar una estimación y es una variable aleatoria.
ESTIMACIÓN: Es el valor que toma el estimador.

Ejemplo 2.9

Consideremos las variables edad en años cumplidos (X) y el docente considera que el investigador educativo debe ser bien remunerado (Y), para distinguir entre estimador y estimación:

Variable	Parámetro	Estimador	Estimación
X	μ	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$\hat{\mu} = \bar{x}$ **= 40,73 años**
	σ^2	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	$\hat{\sigma}^2 = s^2$ **= 33,21 años²**

Y	π	$p=\dfrac{n_A}{n}$	$\hat{\pi}=p=0{,}7333$ **(73,33%)**

PRUEBA DE HIPÓTESIS

Proceso mediante el cual, a partir de los valores de una muestra aleatoria se decide si se rechaza o no el supuesto que plantea el investigador para el parámetro o parámetros de la población o poblaciones bajo estudio, pero con cierta probabilidad de error (riesgo) por tomar una decisión.

Ejemplo 2.10

En cierta investigación, se requiere estudiar el nivel de comprensión lectora en niños de 8 años de edad, que asisten a Instituciones Educativas estatales y privados, para tal fin se elige al azar una muestra de alumnos de cada tipo de Institución Educativa (IE). Se pretende lograr los siguientes objetivos:

1. Determinar el nivel promedio poblacional del puntaje de la prueba de comprensión lectora para tipo de IE.

2. Verificar si el nivel promedio poblacional del puntaje de la prueba de comprensión lectora en niños de IE estatal es diferente de los niños de IE privados.

Explicar cuál rama de la Inferencia Estadística empleará, para lograr cada objetivo.

Solución

Previamente se requiere identificar:

Población. Se trata de dos poblaciones bajo estudio:

1: Niños de 8 años de edad, que asisten a Instituciones Educativas Estatales.

2: Niños de 8 años de edad, que asisten a Instituciones Educativas Privadas.

Muestra. Niños de 8 años de edad seleccionados aleatoriamente e independiente de cada población.

Variable Aleatoria. Esta representada mediante X y se define como Puntaje de comprensión lectora obtenida mediante una prueba especial.

Parámetros. En relación a la variable aleatoria bajo estudio y considerando que se investiga para dos tipos de IE, los parámetros son:

μ_1 = Nivel promedio poblacional del puntaje de la prueba de comprensión lectora para niños de 8 años de edad que asisten a IE Estatales.

μ_2 = Nivel promedio poblacional del puntaje de la prueba de comprensión lectora para niños de 8 años de edad que asisten a IE Privados.

σ_1 = Desviación estándar poblacional del puntaje de la prueba de comprensión lectora para niños que asisten a IE Estatales.

σ_2 = Desviación estándar poblacional del puntaje de la prueba de comprensión lectora para niños que asisten a IE Privadas.

Para lograr el objetivo 1. Se debe emplear la estimación debido a que se requiere tener un valor aproximado de μ_1 y μ_2 empleando muestras aleatorias que se han obtenido de manera independiente de cada tipo de institución educativa.

Para el logro del objetivo 2. Se desea verificar que los promedios poblacionales μ_1 y μ_2 son diferentes a partir de muestras aleatorias, aritméticamente significa: μ_1 diferente de μ_2 ($\mu_1 \neq \mu_2$) o equivalentemente μ_1 - μ_2 = 0.

En este caso se parte del supuesto que no existe diferencias entre el nivel promedio poblacional del puntaje de la prueba de comprensión lectora para niños que asisten a IE

Estatales y Privados. Por tanto se empleara la prueba de hipótesis estadística, mediante el cual se somete a prueba μ_1 - μ_2 = 0.

ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA

Según Sierra Bravo (1991) es parte de la estadística que exige determinados requisitos para emplear en la inferencia estadística generalmente requiere para su uso el supuesto de normalidad es decir que las muestras aleatorias se extraen de poblaciones que están normalmente distribuidas o aproximadamente.

Ejemplo 2.11

Se desea verificar si el tiempo promedio requerido para resolver un problema sencillo en niños de 10 años de edad con secuelas neurológicas derivadas de hiperbilirubenia al nacer, se incrementa después de haber recibido una capacitación especial para resolver problemas de ese tipo.

En este caso se debe elegir una muestra aleatoria de la población conformada por niños de esta población, es decir, niños de 10 años de edad con secuelas neurológicas derivadas de hiperbilirubenia al nacer.

La variable aleatoria bajo estudio *X*, es el tiempo, en minutos, para resolver un problema sencillo, cuyo parámetro se define como:

μ = Tiempo promedio poblacional, en minutos, requerido para resolver un problema sencillo.

Para estudiar a este parámetro se requiere evaluar a la muestra aleatoria de esta población antes de la capacitación especial y después de la capacitación especial, es decir los parámetros para este esquema, sujetos a estudio estadístico son:

μ_1: Tiempo promedio poblacional, en minutos, requerido para resolver un problema sencillo antes de la capacitación.

μ_2: Tiempo promedio poblacional, en minutos, requerido para resolver un problema sencillo antes de la capacitación.

En este caso la muestra aleatoria es relacionada, porque a cada unidad de la muestra se le evalúa bajo dos condiciones antes, y después de la capacitación especial.

Para verificar el supuesto propuesto: la capacitación especial incrementa el tiempo promedio requerido para resolver problemas sencillos en niños de esta población a partir de muestras relacionadas, se aplica una prueba de hipótesis para someter a prueba: μ_1: tiempo, en minutos, promedio poblacional requerido para resolver un problema sencillo μ_1 < μ_2 o equivalentemente μ_1 - μ_2 < 0.

La Estadística Inferencial nos da la herramienta llamada estadística para someter a prueba la diferencia de medias poblacionales empleando muestras relacionadas, cuya aplicación requiere que las diferencias de cada par de observaciones (tiempo empleado para resolver un problema sencillo antes y después de la capacitación especial) debe tener distribución normal de probabilidad. En este caso se está empleando la estadística paramétrica debido a que debe cumplir con el supuesto de normalidad.

ESTADÍSTICA NO PARAMÉTRICA

Cuando no se da el supuesto de la normalidad se tiene dos alternativas, una de ellas es aproximar los valores de los datos a una distribución normal para el cual a una serie de métodos y la segunda alternativa es emplear los métodos de la estadísticas no paramétricas, es decir, métodos que no supone nada acerca de la distribución población muestreada por eso también a los métodos de la estadística no paramétrica se le llama de distribución libre.

Y que son excelentes cuando los tamaños muestrales son pequeños ($n \leq 10$), asimismo estos métodos se basan en el análisis de los rangos de los datos que en las propias observaciones.

Ejemplo 2.12

Considerando el caso anterior si las diferencias muestrales no cumplen con el supuesto de normalidad, cuya verificación se realiza con herramientas estadísticas pertinentes, entonces se recurrirá a la estadística no paramétrica; y que se tratará en el capítulo 6.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Leer atentamente el siguiente resumen, del artículo de investigación, titulado:

COMPETENCIAS DOCENTES EN LOS PROFESORES DE MEDICINA DE LA UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO[1]

RESUMEN

Para la identificación de un grupo de competencias docentes básicas en los profesores que se desempeñan en la licenciatura en medicina en la Facultad de Medicina “Dr. Ignacio Chávez”, objetivo fundamental del presente trabajo, se utilizaron métodos teóricos y empíricos. Se aplicó una encuesta a una muestra seleccionada de docentes y alumnos. Se emplearon procedimientos estadísticos para el análisis de los resultados y se elaboraron tablas. A partir de la identificación de las necesidades de aprendizaje de los profesores estudiados, en relación con la dirección del proceso enseñanza-aprendizaje y los referentes teóricos sobre el tema, se realizó un análisis integrador para valorar los datos obtenidos, lo que permitió la caracterización de los docentes objeto de investigación, en relación con las competencias docentes básicas propias de una gestión formativa pertinente. Se tomaron en consideración los principios metodológicos más actuales acerca de la formación de recursos humanos en la educación superior en sentido general y en particular en la educación médica superior.

---

[1] MANZO RODRÍGUEZ, Lidia, RIVERA MICHELENA, Natacha y RODRÍGUEZ OROZCO, Alain: “Competencias docentes en los profesores de medicina de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.” Revista Cubana Educativa de Medicina Superior, Abril-Junio, 2006, Vol. 20, Nº 2.

A partir de este resumen:

1.1. Defina la población.

1.2. Defina la muestra.

1.3. Defina la(s) variable(s) aleatoria(s).

1.4. Plantear un parámetro y su respectivo estadístico, según su respuesta dada en 3.

2. Leer atentamente el siguiente resumen, del artículo de investigación, titulado:

PERCEPCIÓN DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE SUS PROPIAS HABILIDADES DE INVESTIGACIÓN[2]

RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue identificar la percepción que tienen los estudiantes universitarios respecto a sus habilidades de investigación, para lo cual se utilizó un instrumento llamado “Autoevaluación de habilidades de investigación” (Rivera, Torres, García Gil de Muñoz, Salgado, Arango, Caña y Valentín, 2005). Participaron 119 estudiantes de los cuales 73.7 % fueron mujeres y 26.3 % hombres, entre ellos, el 88.2 % se encontraba realizando estudios de licenciatura y el 11.8 % de posgrado. Se contó con representantes de cuatro áreas de conocimiento: Ciencia y tecnología, Ciencias humanas, Ciencias económico administrativas, y Educación. La confiabilidad del instrumento aplicado fue alta (Alfa de Cronbach = 9557). Se encontró que la mayoría de los estudiantes asignan calificaciones altas a sus habilidades de investigación y que por lo general los hombres y las mujeres evalúan sus habilidades de investigación de manera semejante; cuando aparecen diferencias significativas,

---

[2] María Elena RIVERA HEREDIA **merivera@bolivar.usb.mx** y Claudia Karina TORRES VILLASEÑOR **ambiental@bolivar.usb.mx** (Universidad Simón Bolívar).
www.usb.edu.mx/investigacion/cif/proyectos/proyecto3/habilidades.doc

son los hombres quienes se asignan puntajes más altos. Se discuten las diferencias entre los resultados arrojados por este cuestionario con los de otras estrategias de evaluación.

En base a este resumen, plantear como sería la aplicación de la inferencia estadística bajo el enfoque de:

2.1. Estimación de parámetros.

2.2. Prueba de hipótesis de parámetros.

CAPÍTULO 3

ESTIMACIÓN DE PARAMÉTROS

3.1. INTRODUCCIÓN

Los estimadores son variables aleatorias, veamos un ejemplo cuando se estima la varianza de una población en base a una nuestra aleatoria difícilmente se puede esperar que el valor de la varianza que obtenemos, a partir de los valores de la muestra aleatoria extraída, sea exactamente igual al valor de la varianza poblacional σ^2; pero debemos esperar que ambos, la varianza muestral y la varianza poblacional, estén lo más cerca posible; Esto es el valor del estadístico y el parámetro tomen valores muy similares.

$$s^2 \approx \sigma^2$$

Pero el investigador no tiene la posibilidad o no puede disponer de los datos de toda la población, entonces debe usar las diversas propiedades estadísticas de los estimadores para que decida cuál es el estimador más apropiado, cuál expone a un riesgo menor, cuál dará la mayor información al costo más bajo, y así podemos seguir enunciando propiedades óptimas.

Por tanto es necesario revisar o examinar las propiedades de los estimadores.

3.2. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

No se tiene la certeza que los estimadores tengan el valor del parámetro, por ello debemos considera sus propiedades.

3.2.1. INSESGAMIENTO

No hay estimadores perfectos que siempre nos van a dar los valores exactos del parámetro pero es razonable que un estimador debe hacerlo al menos en el promedio, esto es su valor esperado debe ser igual al parámetro que se supone estima. Es este caso se dice que es estimador es insesgado.

Formalmente un estadístico $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado del parámetro θ, cuando $E(\hat{\theta}) = \theta$

Ejemplo 3.1

El estimador s^2 es insesgado de σ^2, por que:

$$E(s^2) = \sigma^2$$

Es decir en promedio el estimador s^2 es igual a σ^2

3.2.2. PROPIEDAD DE EFICIENCIA

Si tenemos que escoger uno entre varios estimadores insesgados de un parámetro dado, se suele tomar aquel cuya distribución muestral tenga la varianza más pequeña, por tanto el estimador seleccionado de varianza más pequeña es eficiente.

Ejemplo 3.2

Sean $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, estimadores insesgados de θ, si sus varianzas respectivas son $V(\hat{\theta}_1)\ yV(\hat{\theta}_2)$, tal que $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$, entonces $\hat{\theta}_1$ es un estimador eficiente, porque el estimador $\hat{\theta}_1$ tiene menor varianza que $\hat{\theta}_2$.

3.2.3. CONSISTENCIA

Llamada también propiedad límite de un estimador, se refiere a que cuando n es suficientemente grande, podemos estar prácticamente seguros de que el error entre el estimador y el parámetro será menor que cualquier constante positiva. Formalmente: la estadística $\hat{\theta}$ es un estimador consistente del parámetro θ si y solo si para cada *c>0*, se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right| < c\right) = 1$$

A este tipo de convergencia expresada por el límite anterior se le llama convergencia en probabilidad. En términos prácticos, cuanto menor es la diferencia entre el parámetro y el estimador, con probabilidad uno, $\hat{\theta} \to \theta$ (el estimador se aproxima lo más que se pueda al parámetro).

3.2.4. SUFICIENCIA

Cuando un estimador utiliza toda la información de la muestra para la estimación de un parámetro, se dice que tiene la propiedad de suficiente o suficiencia.

Ejemplo 3.3

La media muestral es un estimador suficiente porque para su cálculo se utiliza todos los datos de la muestra. Recuerde el cálculo:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

3.2.5. ROBUSTEZ

Un estimador es robusto si su distribución nuestral no se ve seriamente afectada por violaciones de la suposiciones, frecuentemente tales violaciones se deben a puntos o datos extremos de origen diversos. También pueden relacionarse con la naturaleza de las poblaciones muestreadas o con sus parámetros.

Ejemplo 3.4

Consideremos los datos de la variable edad en años cumplidos, del ejemplo 2.8, a fin de calcular la mediana, para ello previamente ordenamos los datos de manera ascendente.

Orden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Edad	30	34	35	36	36	38	39	42	43	44	44	46	47	48	49

El dato que está en la posición (orden) 8 es el valor de la mediana, es decir, $Me = 42$ años y se interpreta como, el 50 % de docentes con edades más bajas tienen como edad máxima 42 años.

Recuerde que $\bar{x}$ = 40,73 años, con respecto a la mediana esta subestimada, esto se debe a la presencia de edades extremas bajas.

Sólo por cuestiones didácticas, vamos a asumir que la edad 49 no es tal, sino es 68, veamos que ocurre con los valores de la media aritmética y la mediana, observe ahora los datos ordenados de manera ascendente son:

Orden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Edad	30	34	35	36	36	38	39	42	43	44	44	46	47	48	68

Ahora la $\bar{x}$ = 42 años y está afectada por el valor extremo alto 58, la media se sobreestima, pero la mediana no cambia, por que el valor extremo alto no le afecta, ya que para el cálculo de la mediana solo interesa el valor de la variable que está en el lugar o posición central. Por tanto la mediana es una estadística que tiene la propiedad de robustez, por que su valor no se afecta por valores extremos.

3.3. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS MEDIANTE INTERVALOS DE CONFIANZA

Un intervalo de confianza es un intervalo estimador de un parámetro, cuyos extremos, el límite inferior (LI) y límite superior (LS) son funciones de la muestra, es decir depende solamente de valores muestrales.

Un intervalo de confianza del parámetro θ es un intervalo $[LI, LS]$, que incluye al parámetro con cierto grado de incertidumbre establecido.

Tomando en cuenta la distribución del estimador, construir un intervalo de confianza es equivalente a plantear el enunciado probabilístico siguiente:

$$P[LI \leq \theta \leq LS] = 1 - \alpha \quad (3.1)$$

Donde α es un número positivo pequeño y el valor $(1-\alpha)$ indica la proporción esperada de las veces que el intervalo contendrá al parámetro cuando el muestreo se repite un determinado número de ocasiones.

Este valor (1-α) se conoce como nivel de confianza. El nivel de confianza se fija de antemano y su valor debe ser grande. A menudo se usa como valores de α como 0.10, 0.05, 0.01, de esta manera los niveles de confianza son 0.90, 0.95 y 0.99, respectivamente. A diferencia del estimador puntual que solo plantea un único valor, el intervalo de confianza brinda un conjunto de posibles valores, respaldado por la probabilidad de que contenga el valor del parámetro.

En las siguientes secciones trataremos acerca de la estimación de parámetros mediante intervalos de confianza, de forma aplicada, para aquellos lectores que les interese el fundamento estadístico matemático, recomendamos revisar en el este capítulo bibliografía correspondiente.

La siguiente teoría está basada en el libro de Freund, E. John, *et al* (2000) y brindamos las aplicaciones paso a paso a fin que se entienda el uso, el cálculo y la interpretación del intervalo de confianza.

3.4. INTERVALO DE CONFIANZA PARA ESTIMAR LA MEDIA μ DE UNA POBLACIÓN NORMAL

El parámetro μ, media poblacional, se obtiene de datos poblacionales, al estudiar una variable cuantitativa continua.

En general la construcción del intervalo para estimar mediante intervalo a un parámetro, depende de los siguientes elementos:

1. De la probabilidad o nivel de confianza que elija el investigador, y es la medida de certeza que consideramos a fin que el intervalo de confianza contenga el valor del parámetro.

2. Del tamaño(s) de la(s) muestra(s) aleatoria(s).

3. Del error estándar del estimador.

Las estimaciones mediante intervalos los haremos empleando los datos recolectados de la muestra aleatoria, que mediante los métodos de la Estadística Inferencial, se podrá realizar conclusiones de la población, es decir, los resultados de la muestra se generalizan para la población, con cierta probabilidad de confianza.

La ventaja de estimar aun parámetro mediante intervalo de confianza es que, para su cálculo se considera la variabilidad del estimador puntual, llamado error estándar, del cual hemos tratado en la sección 2.8.

RECUERDE

Un intervalo de confianza o estimación mediante intervalo de confianza es un conjunto de valores que probablemente contiene al valor del parámetro (expresión 3.1)

Para interpretar al intervalo de confianza no solo debe realizarse en términos cuantitativos sino se debe contextualizar y ser conscientes que la calidad de los datos, es decir su pertinencia, respecto a los objetivos para lograr en la investigación o las hipótesis a verificarse, harán que los cálculos obtenidos no sean fríos, por el contrario estará indicando alguna propiedad respecto a la población.

RECUERDE

Si los datos no se han recolectado adecuadamente, sin el debido cuidado, pueden resultar inútiles, aunque se el tamaño de la muestra sea grande.

3.4.1. CUANDO LA VARIANZA POBLACIONAL σ^2 ES CONOCIDA

Si $\bar{x}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño *n* obtenida de una población normal con varianza poblacional σ^2 conocida, entonces:

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (3.1)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)$ 100 % para la media poblacional μ.

En este caso la distribución de probabilidad normal es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza.

Sus límites son:

Límite inferior : $\bar{x} - z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Límite superior : $\bar{x} + z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ambos límites dependen de la probabilidad de confianza que elija el investigador y del error estándar de la media muestral, ver sección 2.8.1.

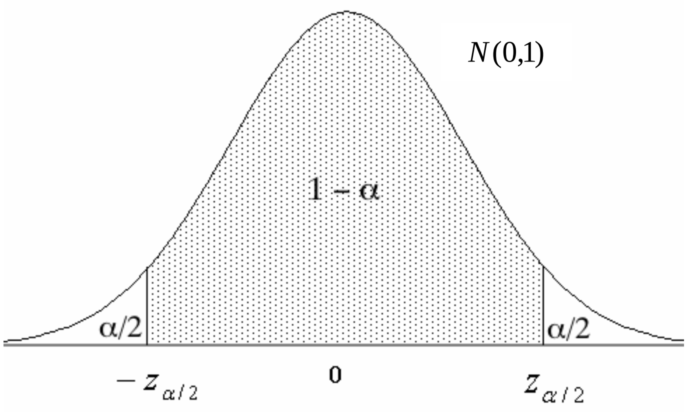
Los valores de los límites contienen al estimador puntual $\bar{x}$, al valor de este estimador para obtener los límites inferior y superior se disminuye y adiciona $z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ respectivamente.

La amplitud o rango del intervalo de confianza es: $2\, z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, esto significa que los posibles valores del parámetro μ, de una población normal, basado en una muestra aleatoria de tamaño n y cuando la varianza poblacional σ^2 es desconocida depende de dos factores: la probabilidad de confianza que elija el investigador y del error estándar del estimador puntual de μ, que es la $\bar{x}$, esto es, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Como también del valor del valor del estimador puntual del parámetro.

En el siguiente gráfico, se muestra la partición de la distribución normal estandarizada para obtener un intervalo de confianza al $(1-\alpha)$ 100 %.

Gráfico Nº 3.1

Partición de la distribución normal estandarizada para obtener un intervalo de confianza para μ



El valor $z_{\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución normal estandarizada, tal que la probabilidad hacia la derecha es $\alpha/2$.

Esta y el resto de cuantilas que se requieren para el cálculo de los intervalos de confianza, los obtenemos mediante el software Excel. En el apéndice se muestra la forma de obtenerlos.

Ejemplo 3.5

El director de la EAP de Educación elige al azar a 16 alumnos de pregrado que están matriculados en el curso Estadística Aplicada a la Educación y que asisten regularmente, con el objetivo de conocer si han comprendido el uso y la importancia de la estimación de parámetros mediante intervalo de confianza. Las calificaciones obtenidas mediante una prueba pertinente (escala vigesimal) tiene distribución normal con σ^2 = 7,43. El director desea saber cuánto es la calificación promedio para todos los alumnos que están matriculados en el curso mencionado. Las calificaciones obtenidas de los 16 alumnos son:

17 13 14 15 13 17 13 8 12 16 15 10 11 13 15 9

Solución

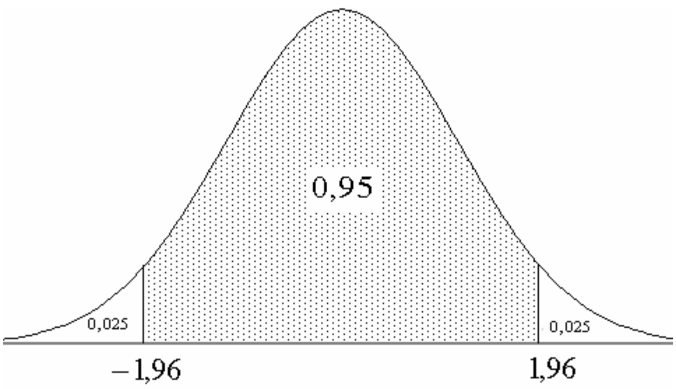
Primero identificamos la variable aleatoria:

X: Calificación de la prueba que mide la comprensión del uso y la importancia de la estimación de parámetros mediante intervalo de confianza.

Esta variable aleatoria tiene distribución normal con parámetros:
μ: Calificación promedio poblacional
σ^2 = 7,43

El nivel de confianza que se empleará es 0.95 o del 95%

Para estimar μ empleamos la expresión 3.1, los valores de la abscisa normal estandariza se presenta en el siguiente gráfico.



Los valores requeridos son:
$\bar{x}$ = 13,2 (estimador puntual de μ), $z_{\alpha/2}$ = 1,96 y $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7{,}43}$ = 2,73.

Los límites del intervalo de confianza para μ son:

Límite inferior: $\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 13{,}2 - 1{,}96\left(\dfrac{2{,}73}{\sqrt{16}}\right) = 13{,}2 - 1{,}34 = 11{,}86$

Límite superior: $\bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 13{,}2 + 1{,}96\left(\dfrac{2{,}73}{\sqrt{16}}\right) = 13{,}2 + 1{,}34 = 14{,}54$

Por tanto se espera con un 95 % de probabilidad de confianza, que la calificación promedio para todos los alumnos que están matriculados en el curso Estadística Aplicada a la Educación y que asisten regularmente, tome valores entre 11,86 y 14,54.

3.4.2. CUANDO LA VARIANZA POBLACIONAL, σ^2, SE DESCONOCE

Si $\bar{x}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n obtenida de una población normal con varianza poblacional σ^2 desconocida, entonces:

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad (3.2)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)$ 100 %, para la media poblacional μ.

En este caso la distribución de probabilidad *t-Student* es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza. Sus límites son:

Límite inferior: $\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

Límite superior: $\bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

Ambos límites dependen de la probabilidad de confianza que elija el investigador y del error estándar de la media muestral, pero cuando la varianza poblacional, σ^2, se desconoce, por tanto se usa como estimador de σ^2 a la cuasivarianza, sección 2.8.2:

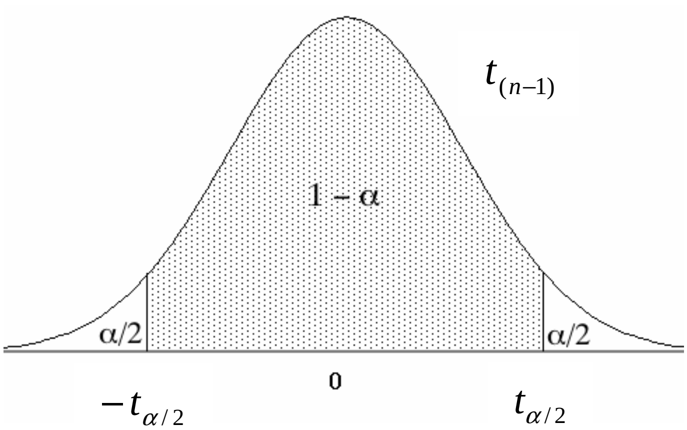
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

La desviación estándar muestral es: $s = \sqrt{s^2}$

Los valores de los límites contienen al estimador puntual $\bar{x}$, al valor de este estimador para obtener los límites inferior y superior se disminuye y adiciona $t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ respectivamente.

En el siguiente gráfico, se muestra la partición de la distribución *t-Student* para obtener un intervalo de confianza al $(1-\alpha)$ 100 %.

Gráfico Nº 3.2
Partición de la distribución *t-Student* para obtener un intervalo de confianza para μ



El valor $t_{\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución *t-Student* con *n*-1 grados de libertad, tal que la probabilidad hacia la derecha es $\alpha/2$.

Ejemplo 3.6

Como parte de la evaluación de la calidad del aprendizaje en escolares del segundo grado de primaria de Instituciones Educativas estatales, el equipo evaluador ha elegido al azar a 20 niños de esta población. Se les aplico una prueba de aritmética que consta de 30 problemas para este nivel, los autores de la prueba indican los escolares de este grado escolar debe emplear en promedio 40 minutos, para resolver estos problemas.

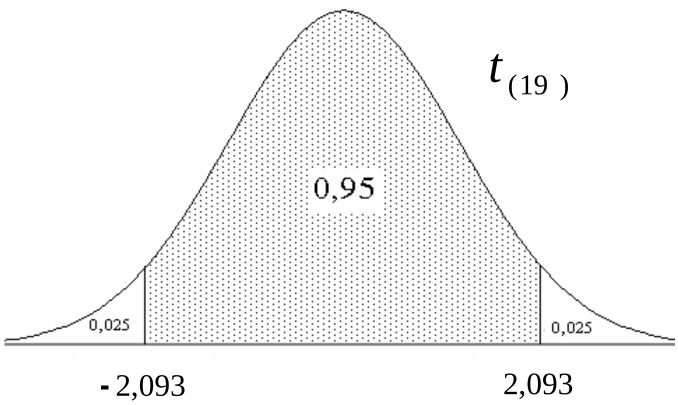
El equipo evaluador desea estimar el tiempo promedio que emplean todos los niños de este nivel de estudios para resolver esta prueba, si se sabe que el tiempo tiene distribución normal.

Los tiempos empleados por los alumnos son:

50	48	48	55	40	52	57	55	47	46
43	49	51	50	53	48	50	46	43	45

Solución

Primero identificamos la variable aleatoria:
X: Tiempo empleado para resolver los 30 problemas.
Esta variable aleatoria tiene distribución normal con parámetros:
μ : Tiempo promedio poblacional empleado para resolver los 30 problemas.
σ^2 : Varianza poblacional del tiempo empleado para resolver los 30 problemas.
No se dispone del valor de σ^2.
El nivel de confianza que se empleará es 0.95 o del 95%.
Para estimar μ empleamos la expresión 3.2, los valores de la abscisa de la distribución *t-Student* con *n*-1 = 19 grados de libertad se presenta en el siguiente gráfico, que corresponde a la participación de la distribución *t-Student*.



Los valores requeridos son:
$\bar{x} = 48,8$ $t_{\alpha/2} = 2,093$ y $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{19,01} = 4,36$.

Los límites del intervalo de confianza son:

Límite inferior: $\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 48{,}8 - 2{,}093\left(\frac{4{,}36}{\sqrt{20}}\right) = 48{,}8 - 2{,}04 = 46{,}76$

Límite superior: $\bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 48{,}8 + 2{,}093\left(\frac{4{,}36}{\sqrt{20}}\right) = 48{,}8 + 2{,}04 = 50{,}84$

Por tanto, se espera con un 95% de probabilidad de confianza que el tiempo promedio poblacional empleado para resolver los 30 problemas, esté comprendido entre 46,76 y 50,84 minutos. La estimación interválica indica que esta población está fuera de control, por que la norma indica que el tiempo promedio poblacional empleado es de 40 minutos, valor que no pertenece al intervalo de confianza obtenido.

3.5. INTERVALO DE CONFIANZA PARA ESTIMAR LA VARIANZA POBLACIONAL σ^2 DE UNA POBLACIÓN NORMAL

Si s^2 es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño *n* obtenida de una población normal, entonces:

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right] \qquad (3.3)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)$ 100 %, para la varianza poblacional σ^2.

En este caso la distribución de probabilidad Chi-cuadrado o Ji-cuadrado, es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza; sus límites son:

Límite inferior: $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$

Límite superior: $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}$

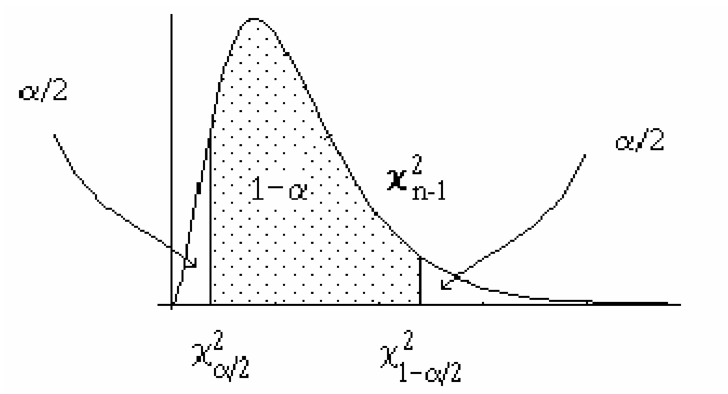
Ambos límites dependen de la probabilidad de confianza que elija el investigador y del error estándar estimado de la varianza muestral s^2.

Los valores de los límites contienen al estimador puntual. En el siguiente gráfico, se muestra la partición de la distribución Chi-cuadrado para obtener un intervalo de confianza al $(1-\alpha)$ 100%, para σ^2.

Gráfico N º 3.3

Partición de la distribución Chi cuadrado para obtener

un intervalo de confianza para σ^2



Fuente: virtual.uptc.edu.co/.../libro/node104.htm (23.05.06)

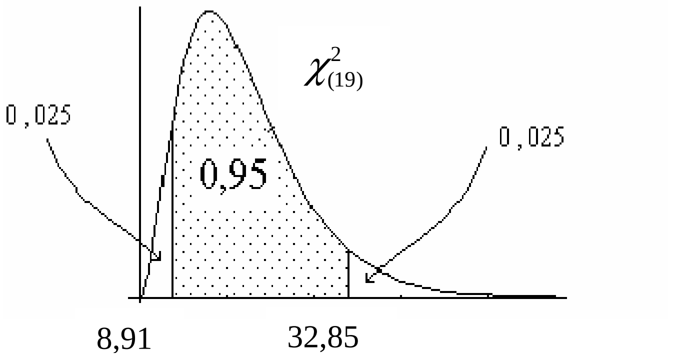
El valor $\chi^2_{\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución Chi cuadrado tal que la probabilidad acumulada es igual a $\alpha/2$ y el valor $\chi^2_{1-\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución Chi cuadrado tal que la probabilidad acumulada es igual a $1-\alpha/2$, pero la distribución Chi cuadrado tiene *n*-1 grados de libertad.

Ejemplo 3.7

Considerar el ejemplo 3.6, para estimar mediante intervalo de confianza a σ^2, varianza poblacional del tiempo empleado para resolver los 30 problemas. Interprete.

Solución

El nivel de confianza que se empleará es 0.95 o del 95 %. Para estimar σ^2, mediante intervalo de confianza usamos la expresión 3.3; Los valores de la abscisa de la distribución chi cuadrado con *n*-1 = 19 grados de libertad se presenta en el siguiente gráfico:



Los valores de requeridos, para calcular el intervalo de confianza son:

$s^2 = 19{,}01$; $\chi^2_{0,025} = 8{,}91$ $\chi^2_{0,975} = 32{,}85$.

Los límites son:

Límite inferior: $$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} = \frac{19(19{,}01)}{32{,}85} = 10{,}99$$

Límite superior: $$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} = \frac{19(19{,}01)}{8{,}91} = 40{,}54$$

Por tanto se espera con un 95% de probabilidad de confianza, que la varianza poblacional del tiempo empleado para resolver los 30 problemas, esté comprendido entre 10,99 y 40,54 minutos^2.

3.5. INTERVALO DE CONFIANZA PARA ESTIMAR LA PROPORCIÓN POBLACIONAL π DE UNA POBLACIÓN BINOMIAL

Si p es una proporción de una muestra aleatoria n (grande) obtenida de una población binomial con parámetro π, entonces:

$$\left[p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \;,\; p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \quad (3.4)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)$ 100%, para estimar la proporción poblacional π.

Siendo p : Es el estimador puntual de π, expresión 2.8 de la sección 2.8.3.

En este caso la distribución de probabilidad normal estandarizada es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza.

Sus límites son:

Límite inferior: $p - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Límite superior: $p + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Ambos límites dependen de la probabilidad de confianza que elija el investigador y del error estándar estimado de la proporción muestral.

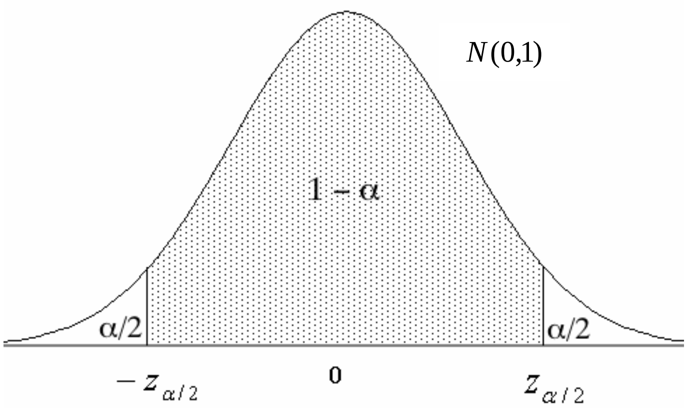
Los valores de los límites contienen al estimador puntual p, al valor de este estimador para obtener los límites inferior y superior se disminuye y adiciona $z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ respectivamente.

En el siguiente gráfico, se muestra la partición de la distribución normal estandarizada para obtener un intervalo de confianza al $(1-\alpha)$ 100%, para la proporción poblacional.

Gráfico Nº 3.4

Partición de la distribución normal estandarizada

para obtener un intervalo de confianza para π



El valor $z_{\alpha/2}$ es la cuantila de la abscisa normal estandarizada tal que la probabilidad hacia la derecha es $\alpha/2$.

Ejemplo 3.8

Se aplica un cuestionario que mide la actitud hacia la autoevaluación de la calidad educativa a una muestra aleatoria de alumnos de la Facultad de Ciencias Matemáticas. De un total de 364 alumnos, 247 evidencian actitud positiva hacia la autoevaluación.

Se solicita que estime la proporción de alumnos de esta Facultad con actitud positiva hacia la autoevaluación de la calidad educativa.

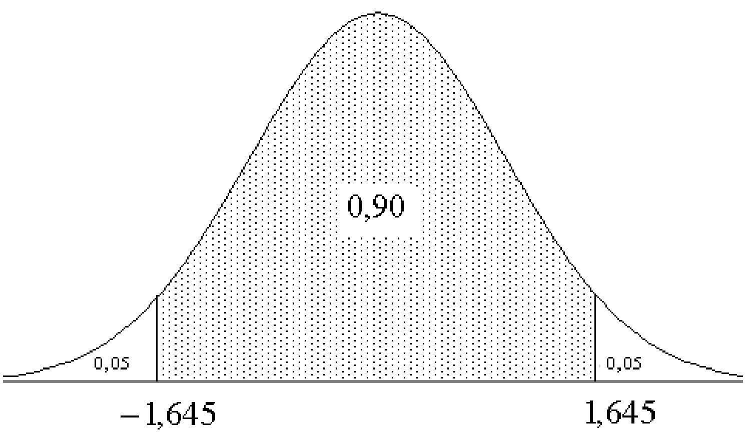
Solución

Primero identificamos la variable aleatoria:
X: Actitud hacia la autoevaluación de la calidad educativa, siendo la clase de interés actitud positiva.

Esta variable aleatoria tiene distribución binomial con parámetros *n* grande (n = 364) y π: Proporción poblacional de alumnos de la Facultad de Ciencias Matemáticas, con actitud positiva hacia la autoevaluación de la calidad educativa.

El nivel de confianza que se empleará es 0.90 (90%).

Para estimar π empleamos la expresión 3.4, los valores de la abscisa de la distribución normal estandarizada se presenta en el siguiente gráfico:



Los valores requeridos, para el cálculo del intervalo de confianza correspondiente son:

$p = \dfrac{247}{364} = 0{,}6786$, $z_{\alpha/2}$ = 1,645.

Reemplazando en la expresión 3.4, se obtiene lo siguiente:

Límite inferior: $$p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} =$$

$$0{,}6786 - 1{,}645\left(\sqrt{\frac{0{,}6786(1-0{,}6786)}{364}}\right) = 0{,}6786 - 0{,}0245 = 0{,}6541$$

Límite superior: $$p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} =$$

$$0{,}6786 - 1{,}645\left(\sqrt{\frac{0{,}6786(1-0{,}6786)}{364}}\right) = 0{,}6786 + 0{,}0245 = 0{,}7031$$

Por tanto se espera que con un 90% de probabilidad de confianza, que la proporción de alumnos de esta Facultad con actitud positiva hacia la autoevaluación de la calidad educativa esté comprendida entre 0,6541 (65,41%) y 0,7031 (70,31%).

3.5. INTERVALO DE CONFIANZA PARA ESTIMAR DIFERENCIA DE MEDIAS POBLACIONALES, $\mu_1 - \mu_2$, DE POBLACIONES NORMALES

Cuando en una investigación deseamos comparar a dos grupos o poblaciones, empleando los valores de una variable aleatoria, estamos realizando análisis de diferencias.

Estas poblaciones pueden ser independientes o relacionadas, por tanto las muestras aleatorias que servirán para realizar inferencias mediante intervalos de confianza también están en ese sentido, veamos.

3.5.1. USANDO MUESTRAS INDEPENDIENTES

Proponemos el siguiente caso, el coordinador del curso Ciencia y Ambiente a fin de mejorar el rendimiento de sus alumnos dispone de dos métodos de enseñanza:

1. Resolución de problemas.

2. Discusión de casos.

El coordinador desea saber con cuál método los alumnos, de la Institución educativa donde trabaja, obtienen mejor rendimiento; entonces realiza el estudio entre alumnos del tercer grado de secundaria de dos secciones. A una sección le asigna aleatoriamente el método resolución de problemas y a la otra sección, el método discusión de casos.

Es obvio que cada método de enseñanza se desarrolla independientemente uno del otro. A este tipo de diseño se le llama de muestras independientes y la comparación se realiza en base al rendimiento de los dos grupos.

El rendimiento de los alumnos se mide mediante una prueba diseñada por el coordinador, que debe ser válida y confiable.

3.5.1.1. CUANDO LAS VARIANZAS POBLACIONALES σ_1^2 Y σ_2^2 SON DESCONOCIDAS PERO $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Si $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ son las medias de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 de poblaciones normales con varianzas poblacionales σ_1^2 y σ_2^2, conocidas e iguales, entonces:

$$\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) \pm t_{\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \qquad (3.5)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ de probabilidad de confianza, para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$.

Donde:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (3.6)$$

Es el estimador insesgado de la varianza común.

El valor $t_{\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución *t-Student* con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad, tal que la probabilidad hacia la derecha es $\alpha/2$. La partición de la distribución de probabilidad *t-Student* es similar a la del gráfico 3.2.

Esto es la distribución de probabilidad *t-Student* es el soporte para obtener los límites y son:

Límite inferior: $\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - t_{\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

Límite superior: $\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) + t_{\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

Ejemplo 3.9

En la enseñanza es muy importante emplear las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TICs) porque brinda resultados positivos en el aprendizaje de los alumnos, un investigador desea mostrar las ventajas para la enseñanza de Historia del Perú frente a la enseñanza tradicional (expositor, pizarra, tiza y papelógrafo).

Empleando las TICs no solo requiere los conocimientos mínimos sobre el hardware y el software a emplearse, sino buscar información relevante para la enseñanza, crear materiales, digitales o multimedia para la docencia y la investigación del curso que se imparte.

Un equipo de investigadores ha desarrollado un software, PERÚ, para la enseñanza de Historia del Perú, para los alumnos del cuarto grado de secundaria. Para verificarlo se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 40, con características similares. Veinte escolares se asignan al azar al grupo control (enseñanza tradicional) y los otros veinte al grupo experimental (enseñanza con el software PERÚ), en ambos grupos enseñan docentes que han sido debidamente capacitados y desarrollan el mismo contenido temático. Al final del curso se aplica una prueba que mide el nivel de conocimientos sobre Historia del Perú a cada grupo y se obtienen las siguientes calificaciones.

Grupo control	13	9,5	12	13	11,5	12	9,5	12	10	13,5
	11	13,5	11,5	10,5	9	12	8	12	10,5	15
Grupo experimental	14,5	13,5	16,5	17	12	13,5	14	17,5	14	16
	17,5	15	15,5	13	17	15	15,5	16	14,5	14,5

Calcule e interprete la estimación de la diferencia de calificaciones promedios poblacionales para los dos grupos, sabiendo que las calificaciones para cada grupo tiene distribución normal, con varianzas desconocidas e iguales.

Solución

X: Calificación de la prueba que mide el nivel de conocimientos sobre Historia del Perú. Esta variable aleatoria tiene distribución normal con parámetros:

Grupo control

μ_1: Calificación promedio poblacional del grupo control.

σ_1^2: Varianza poblacional de la calificación del grupo control.

Grupo experimental

μ_2: Calificación promedio poblacional del grupo que ha usado el software PERÚ.

σ_2^2: Varianza poblacional de la calificación del grupo que ha usado el software PERÚ.

El nivel de confianza que se empleará es 0.95 o del 95%.

Para estimar $\mu_1 - \mu_2$ empleamos la expresión 3.5, pero previamente calcularemos el valor de la varianza combinada:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Las estadísticas obtenidas son:

Grupo control : $\bar{x}_1$ = 11,45 y s_1^2 = 2,99

Grupo experimental : $\bar{x}_2$ = 15,1 y s_2^2 = 2,38

Los tamaños de muestras n_1 = 20 y n_2 = 20, reemplazando adecuadamente:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(19)2{,}99 + 19(2{,}38)}{38} = \frac{102{,}03}{38} = 2{,}69$$

$$S_p = \sqrt{2{,}69} = 1{,}64$$

Para calcular los límites se requiere, el valor de $t_{0,025}$ = 2,024 con 38 grados de libertad, y $\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = 0{,}32$.

Calculamos los límites:

Límite inferior:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t_{\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (11{,}45 - 15{,}1) - (2{,}024)(1{,}64)(0{,}032) = -3{,}76$$

Límite superior:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t_{\alpha/2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (11{,}45 - 15{,}1) + (2{,}024)(1{,}64)(0{,}032) = -3{,}54$$

Por tanto se espera con un 95% de probabilidad de confianza, que la diferencia de la calificación promedio poblacional entre el grupo control y el grupo experimental está comprendida entre -3,76 y -3,53. Como podemos notar, ambos límites son negativos para estimar mediante intervalo de confianza a $\mu_1 - \mu_2$, por tanto la calificación promedio poblacional del grupo que ha usado el software PERÚ es mayor que del grupo control.

3.5.1.2. CUANDO LAS VARIANZAS POBLACIONALES σ_1^2 Y σ_2^2 SON DESCONOCIDAS, PERO $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Si $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son las medias de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 de poblaciones normales con varianzas poblacionales σ_1^2 y σ_2^2, desconocidas y diferentes, entonces:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \qquad (3.7)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ de probabilidad de confianza, para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$.

Donde:

El número de grados de libertad, para la abcisa $t_{\alpha/2}$ de la distribución *t-Student*, de acuerdo a Smith-Satterthwaite es:

$$\gamma = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1}\right]^2}{n_1 - 1} + \frac{\left[\frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{n_2 - 1}} \qquad (3.8)$$

Si su valor no es entero, entonces se redondea por defecto al entero más próximo.

En este caso la distribución de probabilidad *t-Student* es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza.

Sus límites son:

Límite inferior: $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Límite superior: $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Ejemplo 3.9

Para evaluar el desempeño docente entre profesores de idioma inglés, que enseñan a alumnos del tercer grado de secundaria, se compara la producción de textos entre alumnos de profesor de lengua nativa castellana (PLNC) y profesor de lengua nativa inglesa (PLNI).

Se evalúa mediante una prueba adecuada cuyo escala es de 0-10 puntos, para muestras aleatorias independientes de alumnos de cada una de dos secciones con profesores de lengua nativa castellana e inglesa; asimismo el puntaje tiene distribución normal con varianzas desconocidas y diferentes. Los puntajes obtenidos son:

PLNC		9	5	7	5	4	6	4	5	
		4	7	5	5	5	6	6	8	
PLNI	7	7	5	6	6	6	8	8	5	5
	5	5	4	7	7	8	6	8	5	4

Calcule e interprete la estimación mediante intervalo de confianza para la diferencia de calificaciones promedios poblacionales entre los dos grupos, sabiendo que la diferencias muestrales tienen distribución normal .para cada grupo tiene distribución normal, con varianzas desconocidas e iguales.

SOLUCIÓN

X: Puntaje de la prueba que evalúa la producción de textos en idioma inglés.

Esta variable aleatoria tiene distribución normal con parámetros:

Grupo PLNC

μ_1: Puntaje promedio de la producción de textos en idioma inglés con PLNC.

σ_1^2: Varianza poblacional del puntaje de la producción de textos en idioma inglés del grupo con PLNC.

Grupo PLNI

μ_2: Puntaje promedio de la producción de textos en idioma inglés con PLNI.

σ_2^2: Varianza poblacional del puntaje de la producción de textos en idioma inglés del grupo con PLNI.

El nivel de confianza que se empleará es 0.90 o del 90%.

Las estadísticas obtenidas son:

Grupo PLNC : $\bar{x}_1$ = 5,69 y s_1^2 = 2,10

Grupo PLNI : $\bar{x}_2$ = 6,1 y s_2^2 = 1,78

Los tamaños de muestras n_1 = 16 y n_2 = 20, reemplazando adecuadamente se tiene que:

Para calcular los límites se requiere, el valor de $t_{0,05}$ pero previamente se debe calcular los grados de libertad según la expresión 3.8:

$$\gamma = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1}\right]^2}{n_1-1}+\frac{\left[\frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{n_2-1}} = \frac{\left[\frac{2,10}{16}+\frac{1,78}{20}\right]^2}{\frac{\left[\frac{2,10}{16}\right]^2}{15}+\frac{\left[\frac{1,78}{20}\right]^2}{19}} = \frac{[0,22]^2}{\frac{[0,131]^2}{15}+\frac{[0,089]^2}{19}} = \frac{0,0484}{0,0011+0,0004} = 32,27$$

Redondeando al entero menor, es 32 grados de libertad, entonces $t_{0,05}$ = 1,694.

Calculamos los límites:

Límite inferior:

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)-t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} = \left(5,69-6,1\right)-(1,694)\sqrt{\frac{2,10}{16}+\frac{1,78}{20}} = -0,41-0,79 = -1,2$$

Límite superior:

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)+t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} = \left(5,69-6,1\right)+(1,694)\sqrt{\frac{2,10}{16}+\frac{1,78}{20}} = -0,41+0,79 = 0,38$$

Por tanto se espera con un 90% de probabilidad de confianza, que la diferencia del puntaje promedio poblacional de producción de textos entre los alumnos cuyo profesor de inglés es de lengua nativa castellana y de profesor de lengua inglesa, está comprendida entre -1,2 y 0,38.

Como podemos notar, el límite inferior es negativo y el superior es positivo, el intervalo contiene al valor cero; esto significa que hay la posibilidad que $\mu_1-\mu_2$ = 0**,** por tanto el puntaje promedio poblacional de producción de textos en idioma inglés para ambos grupos de alumnos probablemente pueden ser iguales.

3.5.2. USANDO MUESTRAS RELACIONADAS

Proponemos el siguiente caso, el profesor del curso Ciencia y Ambiente observa que sus alumnos tienen bajo rendimiento, por tanto decide cambiar de método de enseñanza y elige método de resolución de problemas debido a que ha leído en revistas de investigación educativa que ha dado buenos resultados, esto es, incrementa el rendimiento de los alumnos del mencionado curso.

A fin de comprobarlo que se elige al azar una muestra de alumnos del tercer grado de secundaria, para realizar el ensayo con una muestra aleatoria de alumnos, pero antes de aplicar el presente método mide el rendimiento del sus alumnos, y también los vuelve a medir al final del curso empleando el método alternativo para la enseñanza del presente curso.

Es obvio que a cada alumno que participa en el ensayo, se mide su rendimiento en el presente curso en dos momentos o bajo dos condiciones distintas antes y después de emplear el método alternativo. El rendimiento de los alumnos se mide mediante una prueba diseñada que debe ser válida y confiable.

En este caso la muestra es relacionada porque son dos mediciones del rendimiento que se obtiene de cada alumno en dos situaciones distintas. A las muestras relacionadas, también se les llama apareadas.

Ahora veamos al intervalo de confianza para estimar $\mu_1 - \mu_2$, usando muestras relacionadas.

Si $\overline{d}$ es el promedio de las diferencias muestrales, obtenida de una muestra aleatoria de tamaño *n*, entonces*:*

$$\overline{d} \pm t_{\alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \qquad (3.9)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ de probabilidad de confianza, para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$. Las diferencias muestrales deben seguir distribución normal de probabilidad.

Donde:

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \qquad (3.10)$$

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1} \qquad (3.11)$$

Son la media de las diferencias muestrales y la varianza muestral de las diferencias, respectivamente.

En este caso la distribución de probabilidad *t-Student* es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza. Sus límites son:

Límite inferior: $\overline{d} - t_{\alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$

Límite superior: $\overline{d} + t_{\alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$

El valor $t_{\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución *t-Student* con $n-1$ grados de libertad, tal que la probabilidad hacia la derecha es $\alpha/2$. Igualmente emplear el gráfico 3.2 para obtener la partición de la distribución *t-Student*, pero considerando los grados de libertad correspondientes.

Ejemplo 3.10

La gestión del director de una institución educativa, es uno de los factores que afecta la calidad de la educación superior. Con la finalidad de mejorar la gestión se dispone de un programa basado en talleres que permiten mejorar el liderazgo, se dispone de 15 directores a quiénes se les aplica una prueba antes y después de la capacitación, que mide el estilo de liderazgo. Se trata de una prueba cuya escala es de 10 a 50, a mayor puntaje, el liderazgo es óptimo.

Los puntajes obtenidos, al aplicar la prueba, son:

Sujeto	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antes	13	16	10	17	13	13	15	17	12
Después	19	10	17	22	23	32	42	30	10
Sujeto	10	11	12	13	14	15	16	17	
Antes	18	12	14	14	12	15	19	20	
Después	28	28	26	32	32	31	33	42	

Calcule e interprete la diferencia de medias poblacionales, si se sabe que las diferencias muestrales tienen distribución normal.

Solución

Para usar la expresión 3.9, se requiere trabajar en base a las diferencias muestrales, para tal efecto disponemos de la siguiente tabla:

Sujeto	**Antes**	**Después**	d_i
1	13	19	-6
2	16	10	6
3	10	17	-7
4	17	22	-5
5	13	23	-10
6	13	32	-19
7	15	42	-27
8	17	30	-13
9	12	10	2
10	18	28	-10
11	12	28	-16
12	14	26	-12
13	14	32	-18
14	12	32	-20

15	15	31	-16
16	19	33	-14
17	20	42	-22
Total			-207

Cálculo de la media de las diferencias muestrales, usando la expresión 3.11, requiere calcular la media de las diferencias muestrales**:**

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{-207}{17} = -12{,}18$$

Cálculo de la varianza de las diferencias muestrales, usando la expresión 3.12**:**

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - 12{,}18\right)^2}{16} = \frac{11234}{16} = 702{,}1$$

Usando nivel de confianza 0,95 (95 %), el valor $t_{0,025}$ = 2,12 con $n-1$ = 16 grados de libertad.

En este caso la distribución de probabilidad *t-Student* es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza. Sus límites son:

Límite inferior:

$$\overline{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} = 12{,}18 - (2.129)\left(\frac{26{,}5}{\sqrt{20}}\right) = -12{,}18 - (2{,}12)(5{,}93) = -12.18 - 12{,}57 = -24{,}75$$

Límite superior:

$$\overline{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} = 12{,}18 - (2.129)\left(\frac{26{,}5}{\sqrt{20}}\right) = -12{,}18 + (2{,}12)(5{,}93) = -12.18 + 12{,}57 = 0{,}39$$

Por tanto se espera con un 95% de probabilidad de confianza, que la diferencia del puntaje promedio poblacional antes de la capacitación y después de la capacitación, está comprendida entre -24,75 y 0,39. Como podemos notar, el límite inferior es negativo y el superior es positivo, el intervalo contiene al valor cero; esto significa que hay posibilidad que $\mu_1 - \mu_2$ = 0**,** por tanto, se recomienda revisar o mejorar la capacitación, a fin que ambos límites sean negativos.

3.6. INTERVALO DE CONFIANZA PARA ESTIMAR LA RAZÓN DE VARIANZAS POBLACIONALES, $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, DE POBLACIONES NORMALES INDEPENDIENTES

Si s_1^2 y s_2^2 son las varianza de muestras aleatorias independientes de tamaños n_1 y n_2 de poblaciones normales, entonces:

$$\left(\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}} \, , \, \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}} \right) \qquad (3.12)$$

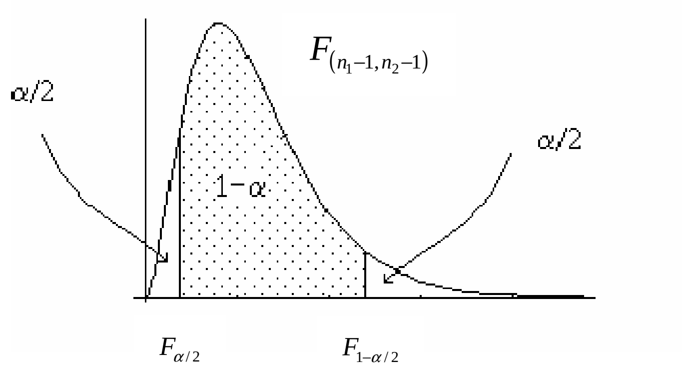
Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ de probabilidad de confianza para estimar $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$**.**

Los valores de los límites contienen a los estimadores puntuales de σ_1^2 y σ_2^2 que son s_1^2 y s_2^2 respectivamente.

En el siguiente gráfico, 3.4, se muestra la partición de la distribución *F-Fisher* para obtener un intervalo de confianza al $(1-\alpha)$ 100 %, para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Gráfico Nº 3.5

Partición de la distribución *F-Fisher* para obtener un intervalo de confianza



El valor $F_{\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución *F de Fisher*, tal que la probabilidad acumulada es igual a $\alpha/2$ y el valor $F_{1-\alpha/2}$ es la cuantila (abscisa) de la distribución *F-Fisher* tal que la probabilidad acumulada es igual a $1-\alpha/2$, pero en este caso la distribución *F-Fisher* tiene n_1-1 y n_2-1 grados de libertad.

En este caso la distribución de probabilidad F de Fisher o simplemente F, es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza; sus límites son:

Límite inferior: $\dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}}$

Límite superior: $\dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}}$

Ejemplo 3.11

Considerar el ejemplo 3.9, para estimar la razón de varianzas poblacionales de la calificación de la prueba que mide el nivel de conocimientos sobre Historia del Perú, entre el grupo control y el grupo experimental.

Solución

Recordemos que la variable aleatoria bajo estudio es:

X: Calificación de la prueba que mide el nivel de conocimientos sobre Historia del Perú. Esta variable aleatoria tiene distribución normal con parámetros, que se describen en el desarrollo del ejemplo 3.9.

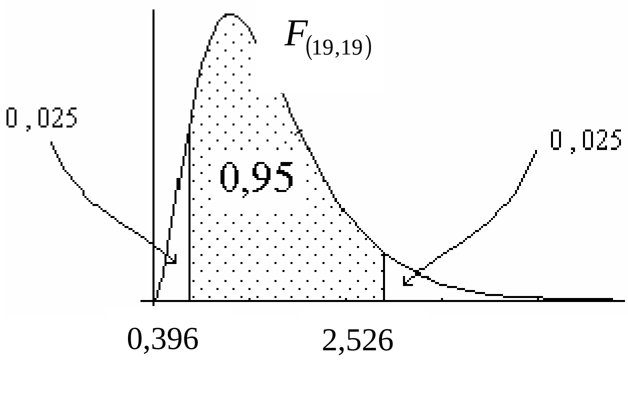
El nivel de confianza que se empleará es 0.95 o del 95 %.

Para estimar $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, empleamos la expresión 3.12, las estadísticas que obtienen de cada muestra son:

Grupo Control: $s_1^2 = 2{,}99$

Grupo Experimental: $s_2^2 = 2{,}38$

Los tamaños de muestras $n_1 = 20$ y $n_2 = 20$, por tanto las cuantilas de la distribución *F-Fisher* con 19 y 19 grados de libertad, se muestran en el siguiente gráfico:



Los límites del intervalo de confianza son:

Límite inferior: $$\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}} = \frac{2{,}99 / 2{,}38}{2{,}526} = \frac{1{,}256}{2{,}526} = 0{,}497$$

Límite superior: $\dfrac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}} = \dfrac{2{,}99/2{,}38}{0{,}396} = \dfrac{1{,}256}{0{,}396} = 3{,}172$

Por tanto se espera con un 95 % de probabilidad de confianza, que la razón de varianzas poblacionales esté comprendida entre 0,497 y 3,172, como se observa el intervalo de confianza contiene al valor uno; Esto significa que hay posibilidad para considerar que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

3.7. INTERVALO DE CONFIANZA PARA ESTIMAR LA DIFERENCIA DE PROPORCIONES POBLACIONALES, $\pi_1 - \pi_2$, DE POBLACIONES BINOMIALES INDEPENDIENTES

Si p_1 es una proporción de una muestra aleatoria n_1 (grande) obtenida de una población binomial con parámetro π_1 y si p_2 es una proporción de una muestra aleatoria n_2 (grande) obtenida de una población binomial con parámetro, entonces:

$$(p_1 - p_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \qquad (3.13)$$

Es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)$ 100 %, para estimar la diferencia de proporciones poblacionales $\pi_1 - \pi_2$.

En este caso la distribución de probabilidad normal estandarizada es el soporte para realizar la inferencia, mediante la estimación por intervalo de confianza. Sus límites son:

Límite inferior: $(p_1 - p_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

Límite superior: $(p_1 - p_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

Ambos límites dependen de la probabilidad de confianza que elija el investigador y del error estándar estimado de la diferencia de proporciones poblacionales. En este caso la partición de la distribución normal estandarizada es como la del gráfico 3.4.

Ejemplo 3.12

En la práctica, la evaluación de la calidad de la educación, requiere disponer de datos que permitan la emisión de juicios de valor basados en la evidencia, por tanto esos datos deben ser válidos y confiables, además deben ser difundidos a través de diversos medios. En tal sentido se realizo una encuesta entre docentes que laboran en universidades estatales y privadas, a fin de conocer la opinión de los docentes sobre calidad de los datos que recolectan las universidades y su trascendencia el proceso de la acreditación académica.

Entre varias preguntas que comprende el cuestionario aplicado, una de ellas es: "¿Los datos que recolecta su universidad garantiza la validez de las evaluaciones?"

Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Universidad	**Tamaño de Muestra**	**Sí**	**No**
Estatal	1650	496	1154
Privada	970	361	609

Se solicita que estime mediante intervalos de confianza la diferencia de proporciones poblaciones entre universidades estatales y privadas, sobre aquellos docentes que opinan que los datos recolectados en la universidad que laboran no garantiza la validez de las evaluaciones.

Solución

X: "¿Los datos que recolecta su universidad garantiza la validez de las evaluaciones?"
Sí
No (Categoría de interés para el estudio)

Esta variable aleatoria tiene distribución binomial con parámetros:

Universidad estatal

π_1: Proporción poblacional de docentes que laboran en Universidades Estatales y que responden que los datos recolectados por su Universidad no garantiza la validez de las evaluaciones.

n_1 = 1650

Universidad privada

π_2: Proporción poblacional de docentes que laboran en Universidades Privadas y que responden que los datos recolectados por su Universidad no garantiza la validez de las evaluaciones.

n_2 = 970

El nivel de confianza que se empleará es 0.90 (90%).

Para estimar $\pi_1 - \pi_2$ empleamos la expresión 3.12, entonces los valores de la abscisa de la distribución normal estandarizada $z_{0,025}$ = 1,645.

Las estadísticas obtenidas son:

Universidad estatal: $p_1 = \frac{1154}{1650} = 0{,}6963$ y $1 - p_1 = 0{,}3037$

Universidad privada: $p_2 = \frac{609}{970} = 0{,}6278$ y $1 - p_2 = 0{,}3722$

Reemplazando en la expresión 3.13, se obtienen los límites:

Pero por razones de espacio primero calculamos:

$(p_1 - p_2) = 0{,}6963 - 0{,}6278 = 0{,}0685$

Límite inferior:

$$\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}=\sqrt{\frac{0{,}6963(0{,}3037)}{1650}+\frac{0{,}6278(0{,}3722)}{970}}=\sqrt{\frac{0{,}2115}{1650}+\frac{0{,}2337}{970}}=\sqrt{0{,}00013+0{,}00024}$$

$$=\sqrt{0{,}00037}=0{,}0192$$

Límite inferior:

$$(p_1-p_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}=0{,}0685-1{,}645(0{,}0192)=0{,}0685-0{,}0316=0{,}0369$$

Límite superior:

$$(p_1-p_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}=0{,}0685+1{,}645(0{,}0192)=0{,}0685+0{,}0316=0{,}1001$$

Por tanto se espera con un 95% de probabilidad de confianza, que la diferencia de proporciones poblacionales esté comprendida entre 0,0369 (3,69%) y 0,1001 (10,01%).

Como observamos los límites son valores positivos y no cubre el valor cero, por tanto la proporción poblacional de docentes que laboran en Universidades Estatales y que responden que los datos recolectados por su Universidad no garantiza la validez de las evaluaciones es mayor que de los docentes de Universidades Privadas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se emplea un método que consiste en usar un manual auto instructivo acompañado del video correspondiente, para aplicar un programa de capacitación industrial. Las calificaciones (0 - 100) obtenidas al final de la capacitación, al aplicar una prueba adecuada a una muestra aleatoria de alumnos son:

71	75	68	59	70	66	78	79	68	73
55	63	72	56	72	66	60	58	62	70

Si las calificaciones tienen distribución normal de probabilidad, con varianza poblacional igual a 40, construir e interpretar el intervalo confidencial para el promedio poblacional de las calificaciones. Emplear 90% y 95% de probabilidad de confianza, compare los resultados.

2. Repita el problema anterior pero asumiendo que la varianza poblacional se desconoce.

3. En un estudio sobre el nivel de conocimientos que tiene el profesor de nivel primaria recién graduado sobre los recursos de las TIC, para el aprendizaje de sus alumnos. Se aplico un cuestionario (0 - 20) para tal fin a una muestra de 25 docentes de esta población, siendo los resultados:

10	14	11	12	9	5	17	18	10	12	16	12	11
8	11	9	10	13	11	9	13	11	8	10	14	

Si las calificaciones tienen distribución normal de probabilidad, construir e interpretar el intervalo de confianza para el promedio poblacional del nivel de conocimientos que tiene el profesor de nivel primario recién graduado sobre los recursos de las TIC, para el aprendizaje de sus alumnos. Tome en cuenta dos casos cuando la varianza poblacional se conoce y es igual a 46 y cuando se desconoce.

4. Respirar benceno puede causar somnolencia, mareo y pérdida del conocimiento; la exposición de larga duración produce alteraciones en la médula de los huesos y puede causar anemia y leucemia., por tanto disminuir el rendimiento académico de los escolares. En cierta investigación se ha tomado muestras de un litro de agua de un río cuyo contenido en $\mu g / L$, en diferentes puntos; Este río recorre tres distritos rurales de extrema pobreza y que cada distrito tiene una escuela polidocente. Según la OPS el valor permisible de benceno es hasta 10 $\mu g / L$. Los datos obtenidos son:

10,4	9,7	11,3	12,7	10,7	10,3	9,5	12,9	8,7	12,9	10,3	11	12
12,7	8	9,2	11,6	10,4	12	11,7	10,9	11,2	8,4	11,9	10,5	8,2
10,2	9,9	9,4	10,6	11	10,7	10,1	9	11,6	10,7	9,4	10	11,4
8,9	11,2	11,7	10,5	10	8	11,3	9,7	10,6	10,4	9,1		

Considerando que el contenido de benceno se distribuye como normal de probabilidad, obtenga e interprete el intervalo de confianza para el contenido promedio poblacional de benceno y su respectiva varianza poblacional.

5. En un estudio realizado en una Universidad Estatal, de 500 estudiantes entrevistados de manera aleatoria, 166 considera que sus padres son demasiado autoritarios. Obtenga e interprete el intervalo de confianza para la proporción poblacional de estudiantes que consideran que sus padres son demasiados autoritarios.

6. Se realizó una encuesta especializada en diferentes bibliotecas universitarias del país, se eligió al azar 60 Facultades (EAP), siendo los resultados:

X_1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
X_2	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
X_1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
X_2	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
X_1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
X_2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
X_1	0	0	1	0	0	1	0	0	0								
X_2	0	0	0	1	0	0	1	0	1								

Donde las variables:

X_1: Cuenta con por lo menos un personal con formación en bibliotecología universitaria.

0: No   1: Sí

X_2: La biblioteca cuenta con Plan Estratégico para su funcionamiento.

0: No   1: Sí

Obtenga e intérprete intervalos de confianza para los siguientes parámetros:

6.1. Proporción poblacional de bibliotecas que cuentan con por lo menos un personal con formación en bibliotecología universitaria.

6.2. Proporción poblacional de bibliotecas que cuenta con Plan Estratégico para su funcionamiento.

7. Se aplica una prueba a los docentes de instituciones educativas de gestión estatal del nivel secundaria y primaria para evaluar la gestión de la alta dirección de la UGEL correspondiente. La prueba tiene puntajes comprendidos entre 10 - 30, a mayor puntaje indica que los docentes consideran que le servicio es eficiente y además los puntajes de esta prueba tiene distribución normal de probabilidad con varianza poblacional igual a 100 para cada nivel. Se han obtenido las siguientes estadísticas:

Nivel	**Media muestral**	**Varianza muestral**
Primaria	16,55	14,252
Secundaria	20,03	12,897

En cada población los puntajes tienen distribución normal de probabilidad.

7.1. Calcular e interpretar el intervalo de confianza para la razón de varianzas poblacionales.

7.2. Calcular e interpretar la estimación de la diferencias de medias poblacionales de los puntajes que evalúan la gestión de alta dirección de la UGEL, entre docentes del nivel primaria y del nivel secundaria, considere nivel de confianza del 90% y 95% ¿Dan los mismos resultados? ¿Por qué?

8. Se está planificando implementar la enseñanza del idioma chino mandarín en la Facultad de Ciencias Empresariales de una Universidad estatal, los resultados basados en muestras aleatorias son:

EAP	**Muestra Aleatoria**	**De acuerdo**
Administración	309	188
Economía	400	247

Mediante la estimación mediante intervalo de confianza para la diferencia de proporciones poblacionales de alumnos que están de acuerdo en que se implemente este idioma, entre las dos EAP; es posible que no existan diferencias de proporciones poblacionales ¿Por qué?

9. En la autoevaluación de una facultad se aplica un cuestionario que mide la satisfacción de los docentes de los departamentos académicos, respecto a la gestión y funcionamiento de la facultad, que se refiere a las facilidades que tiene para su desarrollo profesional, al reconocimiento de su trabajo, participación en la toma de decisiones, entre otros. El cuestionario tiene una escala de 20 a 80, a mayor puntaje indica alta satisfacción de los docentes. Los datos según sexo del docente son:

Masculino	60	47	56	66	70	50	61	66	70	50
	47	57	62	58	61	51	67	48	59	68
	63	49	71	68	59	52	64	53	65	59
Femenino	38	23	28	42	29	30	50	38	36	47
	33	35	51	35	31	37	22	38	31	40
	41	28	42	46	31	47	48	30	50	35

Asumiendo que los datos tienen distribución de probabilidad normal:

9.1. Obtenga el intervalo de confianza para la razón de varianzas poblaciones ¿Hay posibilidad que sean iguales?

9.2. Interprete el intervalo de confianza para la diferencia de promedios poblacionales del puntaje de satisfacción entre docentes de sexo masculino y femenino.

10. Se ha realizado la evaluación del desempeño de docente (de profesión estadístico) en aula durante el desarrollo de sus clases, para el curso de Estadística Básica entre dos áreas de estudios, en cuanto al ítem: “El docente fomenta la práctica de la capacidad autocrítica entre sus alumnos”, la respuesta de los alumnos es:

Área	Muestra Aleatoria	Sí
Ingenierías	328	261
Ciencias Básicas	500	385

Estimar mediante intervalo de confianza la diferencia de proporciones poblacionales de alumnos que responden afirmativamente a este ítem, entre las aéreas de Ingenierías y de Ciencias Básicas.

Se evalúa a los alumnos del tercer ciclo de estudios o más de la EAP de Investigación Operativa sobre comprensión lectora y ortografía, empleando pruebas confiables y válidas en una muestra aleatoria de 27 alumnos. Antes de participar y al termino de un curso taller para mejor la comprensión lectora y la ortografía se evalúan con las pruebas mencionadas. Los puntajes (con valores de 10 a 30) que obtienen los alumnos antes y al final del curso taller son:

Alumno	Antes	Después
1	17	22
2	16	19
3	11	16
4	20	27
5	20	24
6	15	21
7	20	24
8	18	19
9	23	23
10	24	24
11	18	24
12	18	20
13	14	19

14	13	18
15	18	23
16	14	18
17	14	21
18	18	26
19	21	28
20	17	23
21	15	21
22	21	27
23	12	17
24	14	18
25	21	21
26	20	26
27	26	28

Obtenga e interprete el intervalo de confianza para la diferencia del puntaje de los promedios poblacionales de la prueba de ortografía ¿El curso taller tuvo buen efecto?

La gestión del director de una Institución Educativa es un factor clave para lograr la calidad educativa. Preocupados por esta situación un equipo multidisciplinarios elabora una capacitación especial, para formar directores con suficiente capacidad de gestión. Para validarlo emplea una muestra aleatoria de 34 directores de Instituciones Educativas de gestión estatal, estos docentes son evaluados antes y al final de la capacitación sobre diversos aspectos de la gestión. A mayor puntaje obtenido indica mayor capacidad de gestión para con la dirección de la Institución Educativa. Los resultados son:

Director	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Antes	20	19	16	23	23	18	23	21	26	27	21	21
Después	26	23	20	31	28	22	28	23	27	32	28	24
Director	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Antes	17	16	21	17	17	21	24	20	18	24	15	17
Después	21	22	25	21	25	30	32	25	23	29	21	22

Director	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**
Antes	24	20	18	23	21	26	27	21	21	17
Después	30	27	25	30	23	27	32	26	24	23

Obtenga el intervalo de confianza para estimar la diferencia de los puntajes promedios poblacionales ¿La capacitación tuvo buen efecto?

CAPÍTULO 4

PRUEBA DE HIPÓTESIS PARAMETRICA

Introducción

En una investigación no solo se requiere estimar un parámetro, sino que el investigador puede proponer hipotéticamente un valor o valores para el parámetro; valor basado en su propia experiencia profesional o según oriente el marco teórico, de la investigación. Por tanto, es necesario decidir si se considera ese supuesto o se rechaza, obviamente se efectúa en base a datos obtenidos de una muestra aleatoria, y empleando la prueba de hipótesis estadísticas o llamado también contraste de hipótesis estadística, o simplemente prueba de hipótesis.

Para verificar las hipótesis estadísticas se deben realizar pruebas estadísticas específicas, si tiene como requisito, que la distribución de probabilidad sea conocida empleamos este capítulo, sino se debe usar las pruebas de hipótesis estadísticas paramétricas.

Con la verificación de la hipótesis se decide si se mantiene el supuesto o se rechaza, pero en condiciones de incertidumbre, para tal efecto se emplea la probabilidad como medida de riesgo, una medida de probabilidad por tomar equivocadamente una decisión.

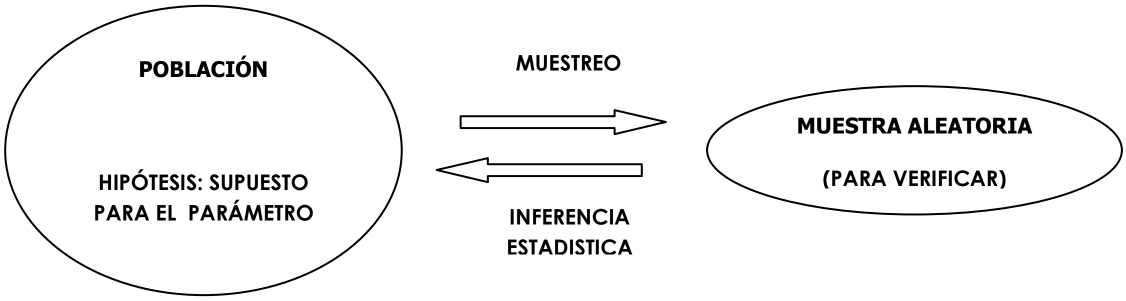
EN RESUMEN

Una prueba de hipótesis es el proceso mediante el cual, a partir de los valores de una muestra aleatoria extraída de una población bajo estudio, se decide si mantiene el supuesto que plantea el investigador para el parámetro, o se rechaza; con cierta probabilidad de error (riesgo) por tomar una decisión.

Con el siguiente grafico se sintetiza la prueba de hipótesis.

Gráfico Nº 5.1

Proceso de la prueba de hipótesis estadística



El gráfico nos está indicando lo siguiente:

Para la población se plantea un supuesto para el parámetro, de ésta se extrae una muestra aleatoria, los datos recolectados de ella se usan para generalizarlo en toda la población, mediante el proceso de la prueba de hipótesis.

Previamente requerimos ciertas definiciones básicas para el estudio y aplicación de una prueba de hipótesis estadística.

Conceptos básicos

Los conceptos básicos se han consultado en Freund, E. John, et al (2000) y Mood, A. y Graybill, F.(1974)

4.2.1.1 Hipótesis estadísticas

Es una conjetura o supuesto que el investigador plantea para el parámetro, que puede o no ser verdadera, relativa a una o más poblaciones. Las hipótesis estadísticas pueden ser simples o compuestas, también nulas o alternativas.

4.2.1.2 Hipótesis simple

Freund, E. John, et al (2000), anotan que “si una hipótesis especifica completamente la distribución se le llama hipótesis simple. Una hipótesis simple debe especificar no solo la forma funcional de la distribución subyacente sino también los valores de todos los parámetros”.

4.2.1.3 Hipótesis compuesta

Freund, E. John, et al (2000), indican que es lo contrario de la hipótesis simple.

Ejemplo 4.1

Se sabe que el tiempo promedio requerido para resolver un problema sencillo en niños de 10 años de edad con secuelas neurológicas es igual a 4.23 minutos, suponiendo que se especifica el tamaño de la muestra (una muestra de niños de esta población) y que la distribución poblacional (el tiempo requerido para resolver el problema) es normal, entonces la hipótesis: μ = 4.23 es una hipótesis simple.

Pero si hubiese conjeturado que el tiempo promedio requerido para resolver un problema sencillo en niños de 10 años de edad con secuelas neurológicas es mayor de 4.23 minutos, se trata de una hipótesis compuesta porque no asigna un valor especifico al parámetro μ , esto es, la hipótesis: μ > 4.23 es una hipótesis compuesta.

4.2.1.4 Hipótesis nula

Supuesto que indica que el valor del parámetro, es constante, que no ha sufrido cambios, es nula. Equivalentemente que la población permanece constante, la hipótesis nula se plantea generalmente con la intención de rechazarla. Se representa mediante H_0 .

4.2.5.1 Hipótesis alternativa

Supuesto que se relaciona con la teoría a demostrarse, enunciado alternativo a la hipótesis nula. Se representa mediante H_1

Ejemplo 4.2

Como parte de la evaluación de la calidad del aprendizaje en escolares del segundo grado de primaria de instituciones educativas estatales, el equipo evaluador ha elegido al azar a 20 niños de esta población. Se les aplico una prueba de aritmética que consta de 30 problemas sencillos, y se obtiene en promedio 51,5 minutos. Los autores de la prueba indican que el niño de este grado escolar debe emplear en promedio para resolverla 40 minutos y con varianza poblacional igual a 576 $(\text{minutos})^2$.

Pero por diversos problemas de aprendizaje indican que el promedio poblacional se ha incrementado.

Solución

Planteamos las hipótesis estadísticas, para el caso propuesto:

H_0 :El tiempo promedio poblacional para resolver 30 problemas sencillos es igual a 40 minutos.

H_1 : El tiempo promedio poblacional para resolver 30 problemas sencillos es mayor de 40 minutos.

Bajo la hipótesis nula se está indicando que la media poblacional no ha sufrido cambios, se mantiene como 40 minutos, pero en la hipótesis alternativa se indica el cambio, en el sentido que la media poblacional es mayor 40 minutos, pero basado en los problemas de aprendizaje que los alumnos evidencian.

Equivalentemente:

$H_0 : \mu = 40$

$H_1 : \mu > 40$

4.2.5.2 Prueba de una hipótesis estadística

Freund, E. John, et al (2000), indican que “la prueba de una hipótesis estadística es la aplicación de un conjunto de reglas para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula. Para tomar una decisión, se recolecta datos muestrales pertinentes, en relación a los objetivos y/o hipótesis propuestas en la investigación y después se calcula el valor de una estadística de prueba que indicara la acción para cada resultado posible; esto es, rechazar o no la hipótesis nula. Esta procedimiento divide los posibles valores de la estadística de prueba en dos subconjuntos: la región de no rechazo y la de rechazo para la hipótesis nula”.

4.2.5.3 Pruebas unilateral y bilateral

Cuando la hipótesis alternativa indica cambio en una sola dirección, (> ó <), con respecto a la hipótesis nula, se dice que la prueba de hipótesis es unilateral. Pero cuando la hipótesis alternativa no indica dirección determinada para el cambio se dice que la prueba es bilateral.

Ejemplo 4.3

Continuando con el ejemplo 4.2, se trata de una prueba unilateral:

$$H_0 : \mu = 40$$
$$H_1 : \mu > 40$$

Por definición en la hipótesis nula se indica que no hay diferencia, por tanto la media poblacional es 40 minutos.

La hipótesis alternativa indica la diferencia en una sola dirección, mayor de 40, basado en lo que evidencian los escolares.

Ejemplo 4.4

En el ejemplo 3.9, se indica que las varianzas poblacionales de la calificación de la prueba que mide el nivel de conocimientos sobre Historia del Perú, son desconocidas e iguales para el grupo control y el grupo experimental.

Las hipótesis estadísticas son:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Por definición en la hipótesis nula se indica que no hay diferencia, por tanto la diferencia de varianzas poblacionales es cero (nula), no hay variación o cambios respecto a al varianza entre los dos grupos poblacionales.

La hipótesis alternativa indica diferencias, porque no hay una propuesta que oriente la dirección de esa diferencia.

4.2.5.4 Errores de tipo I y de tipo II

Los errores que podemos cometer cuando realizamos una prueba de hipótesis, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4.1
Decisión basada en la prueba estadística y el estado real del valor supuesto para el parámetro

DECISIÓN	**ESTADO REAL**	
	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Rechazar H_0	**Error de tipo I**	OK
No rechazar H_0	OK	**Error de tipo II**

Estos errores deben ser cuantificados, pero en en terminos de probabilidad de riesgo, por que estamos ante la incertidumbre. Por tanto la probabilidad de cometer Error de tipo I y Error de tipo II, respectivamente son las siguientes probabilidades condicionales:

$$\text{P[Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera] = } \alpha \qquad (4.1)$$

$$\text{P[No Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa] = } \beta \qquad (4.2)$$

Pero una buena prueba estadística es aquella en donde tanto α como β son pequeñas, porque permitirá tomar una decisión correcta, con menor riesgo para equivocarse.

En términos de probabilidad la tabla 4.1 se muestra como la siguiente tabla.

Tabla 4.2

Decisión basada en la prueba estadística y el estado real del valor supuesto del parámetro, términos de probabilidad

DECISIÓN	**ESTADO REAL**	
	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
Rechazar H_0	α	1-β
No rechazar H_0	1-α	β

Al observar la tabla 4.2 se deduce que el rechazo de una hipótesis nula verdadera conduce a cometer Error de tipo I o α, mientra que el norechazo de una hipótesisi nula falsa conduce a cometer Error de tipo II o β.

El error α está bajo control del investigador y se elige o establece antes de realizar la prueba de hipótesis, es el nivel de significancia para la prueba de hipótesis, entonces como se puede controlar α, también 1-α está controlada.

En el capítulo anterior hemos visto que 1-α es el nivel de confianza, o probabilidad de que el intervalo de confianza contenga al valor del parámetro.

Pero el error β, es complicado, porque varía con α, esto es, el tamaño de muestra, la prueba estadística concreta que se utiliza, el diseño elegido y la magnitud del efecto, influyen en estos errores.

A la probabilidad 1-β, se le llama potencia, es la probabilidad de no cometer error de tipo II.

4.2.5.5 Nivel de significación de la prueba

La probabilidad α es el nivel de significación de la prueba, es el riesgo o la probabilidad que el investigador asume de manera voluntaria para equivocarse al rechazar la hipótesis nula, cuando en realidad es verdadera.

Es también la confiabilidad de decidir si se rechaza o no la hipótesis nula. Los niveles de significación más usados son: 0,01, 0,05 y 0,10.

Cuando se rechaza la hipótesis nula, se dice que hay significancia estadística, pero cuando no se rechaza la hipótesis nula significa que “no existe suficiente información como para rechazarla”, es errado afirmar que se acepta la hipótesis nula. No se puede aceptar algo que no sabemos que sea verdadero o falso.

Que una prueba sea estadísticamente significativa, es decir, rechazar la hipótesis nula no asegura que la hipótesis alternativa sea cierta ante la evidencia de datos muestrales, sino que los datos muestrales discrepan con el supuesto bajo la hipótesis nula.

Recuerde que la muestra es aleatoria, los estadísticos también lo son y por puesto que la estadística que se usan para someter a prueba hipótesis estadísticas.

Por tanto se recomienda a los lectores no ser mecanicistas y estar dependiendo del valor α, porque lo estadísticamente significativo no siempre es relevante para la investigación. Pero si el investigador le da relevancia a la investigación, esto es, emplea los mejores recursos teórico-metodológicos y por tanto obtiene datos de calidad, en resumen sigue adecuadamente el método científico.

Ahora se usan los softwares estadísticos como SPSS, MINITAB, SAS, entre otros y es preocupante ver como se usa de manera indiscriminada, sin sustento, se cree que es solo poner los datos y ver el resultado si es o no estadísticamente significativo. No hay que contentarse con que sea estadísticamente significativo sino que sea relevante la investigación.

4.2.10.1 Estadístico de prueba

Para rechazar o no la hipótesis nula se toma una muestra aleatoria de la población bajo estudio y los resultados contenida en ella se usa en expresiones llamadas estadísticos o estadísticas de prueba e indican el grado de discrepancia entre la hipótesis nula y los datos muestrales que están resumidos en las estadísticas.

Cuando la discrepancia es “grande”, es decir la evidencia de la muestra (datos muestrales) difiere del valor supuesto para el parámetro bajo la hipótesis nula; se rechaza la hipótesis nula en caso contrario no se rechaza.

Ejemplo 4.5

Asumiendo, para el ejemplo 4.2, que el tiempo para resolver 30 problemas sencillos se distribuye como normal de probabilidad y con varianza poblacional igual a 4,47 $(\text{minutos})^2$, la estadística para someter a prueba las hipótesis:

$H_0 : \mu = 40$

$H_1 : \mu > 40$

Es: $$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(Se lee así: la estadística Z se distribuye como normal estandarizada)

Pero analicemos la estadística:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

La media muestral $\bar{x}$, es el valor que se obtiene en base a los datos de la muestra s 51,5 minutos.

Siendo μ_0=40 minutos, que es el valor asumido, para la media poblacional, bajo la hipótesis nula.

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es el error estándar de la media muestral, ver sección 2.8.1, cuyo valor es:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{24}{\sqrt{20}} = \frac{24}{4,47} = 5,37$$

El valor de la estadística: *Z*= 2,14

Podemos afirmar que la estadística para la prueba de hipótesis es una medida de contraste entre la información muestral y lo que se asume o conjetura para el parámetro, bajo la hipótesis nula.

4.2.10.2 Región de rechazo

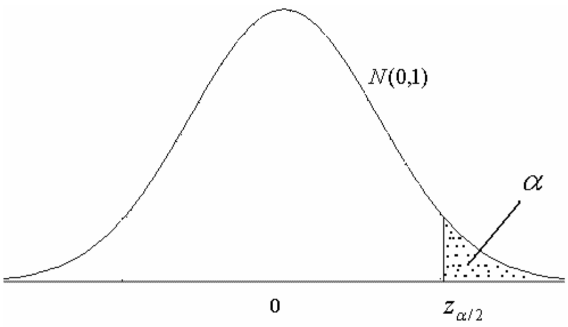
Al conjunto de valores de la estadística de prueba para los que la hipótesis nula se rechaza se llama “región de rechazo o región crítica”.

El establecimiento de la región de rechazo depende de la distribución de probabilidad de la estadística de prueba, el punto de corte (punto o valor que divide a la región crítica de la no crítica) se llama también “valor crítico o punto crítico”, cuyo su valor depende de la distribución de probabilidad de la estadística de prueba.

Ejemplo 4.6

Continuando con el desarrollo del ejemplo 4.5, la región crítica o de rechazo, se establece tomando en cuenta que la prueba de hipótesis unilateral, con desigualdad mayor que (>) entonces la región de rechazo va en ese sentido; una región de rechazo unilateral, porque mientras mayor sea el valor de la estadística *Z*, la evidencia muestral no estará a favor del supuesto sino se le rechazará.

Veamos la región crítica para someter a prueba estas hipótesis estadísticas.



Si elegimos α=0,05, entonces $z_{\alpha/2}$=1,645 (valor crítico), por tanto la región de rechazo, indica que si el valor de la estadística *Z* >1,645 se rechaza la hipótesis nula; en caso contrario no se rechaza.

En el ejemplo 4.5, se calculo el valor de la estadística: *Z*= 2,14, este valor es mayor de 1,645, por tanto se rechaza la hipótesis nula, al 5% de nivel de significación, esto es, ante la evidencia de la muestra, se puede asumir que el promedio poblacional para desarrollar la presente prueba se ha incrementado, por tanto el investigador debe tomar la decisión más adecuada para que el promedio para esta poblacional no sea mayor de la norma (40 minutos).

4.2.10.3 Nivel crítico de una prueba de hipótesis (p-value)

Es la probabilidad, que mide el riesgo que tiene el investigador cuando al obtener un cierto valor de la estadística, se rechaza la hipótesis nula. (SPSS le llama Sig).

4.3. Etapas para realizar una prueba de hipótesis

La prueba de hipótesis brinda las herramientas estadísticas para someter a prueba las hipótesis estadísticas y también modelos teóricos, para ambos casos es conveniente seguir la siguiente secuencia, ya sea cuando se realizan los cálculos de forma manual o auxiliándose de un software estadístico.

Los pasos a seguir se presentan a continuación.

1. Plantear adecuadamente las hipótesis nula y alternativa.
2. Elegir el nivel de significación (α).
3. Elegir el estadístico para la prueba, de acuerdo a los requisitos que exige la teoría estadística inferencial.
4. Definir la región de rechazo, según la hipótesis alternativa propuesta.
5. Calcular el estadístico seleccionado para realizar la prueba de hipótesis.
6. Compara el valor de la estadística de prueba con el valor crítico, para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula.

4.4. Prueba de para μ de una población normal

Se aconseja que el lector A este nivel de estudio es importante que se tenga bien en cuenta los conceptos y la aplicación tanto de la estadística descriptiva como de la estimación mediante intervalos; así como plantear adecuadamente las hipótesis nula y alternativa.

La prueba de hipótesis es paramétrica por que se aplica solo para muestras aleatorias que provienen de poblaciones con distribuciones de probabilidad conocida, que generalmente es la distribución de probabilidad normal.

Iniciamos las pruebas de hipótesis para el parámetro la media poblacional, μ, bajo dos aspectos cuando se conoce la varianza poblacional y cuando es desconocida.

4.4.1. Cuando σ^2 se conoce

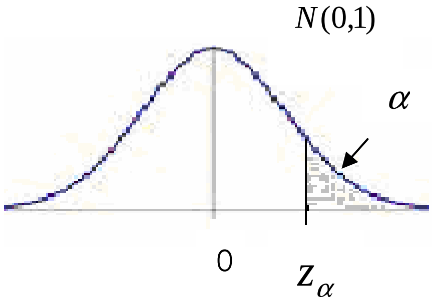
Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ una muestra aleatoria de tamaño n obtenida de una población normal con parámetros μ y σ^2 (conocida), para someter a prueba las hipótesis:

(I)	**(II)**	**(III)**
$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Se emplea la estadística:

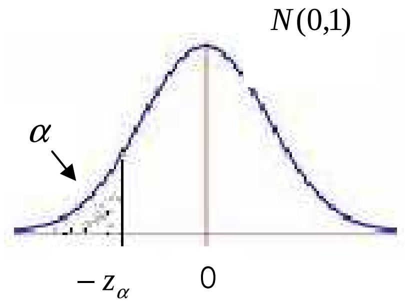
$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad (4.1)$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



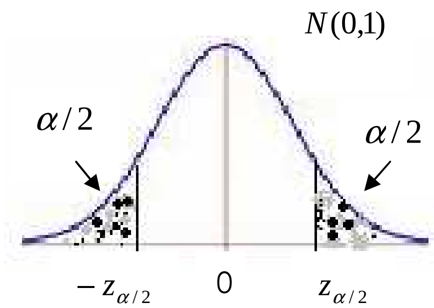
Rechazar H_0 si el valor de la estadística $Z > z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0 .

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0 si el valor de la estadística $Z < -z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0 .

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0 si el valor de la estadística $Z < -z_{\alpha/2}$ ó $Z > z_{\alpha/2}$, en caso contrario no se rechaza H_0 .

Obs. Cuando la muestra es grande de una población que no sea normal, pero tiene varianza finita, se usa el TLC, para usar esta prueba aún cuando no se conozca la varianza poblacional, se aproxima su valor con la varianza muestral. Ver sección 2.8.1 (pág. 18)

Ejemplo 4.7

Se ha determinado que la duración promedio para concluir los estudios de la carrera profesional de Derecho en cierta Universidad Estatal, es de 14 semestres y con desviación estándar igual a 8 semestres, así mismo la duración de los estudios tiene distribución normal de probabilidad. En el proceso de autoevaluación de esta carrera profesional se ha elegido una muestra aleatoria de 40 egresados del periodo 2004-2007, siendo los semestres que han realizado para concluir sus estudios:

21	16	16	19	13	15	19	14	19	20	16	19	20	16	19	13	16
12	14	15	13	16	12	15	16	16	17	15	14	16	16	18	17	19
18	19	17	18	16	19											

El equipo evaluador considera que por diversos factores que la duración promedio de los estudios se ha incrementado. ¿La muestra aleatoria apoya este supuesto? Asumir que la muestra tiene comportamiento normal de probabilidad.

Solución

X: Duración (semestres) para concluir la carrera profesional de Derecho.

$X \sim N(\mu, 64)$

$\sigma^2 = 64$ semestres^2 la varianza poblacional de la duración semestral para concluir la carrera profesional de Derecho.

$\sigma = 8$ semestres, es la desviación estándar poblacional de la duración semestral para concluir la carrera profesional de Derecho.

La prueba de hipótesis es:

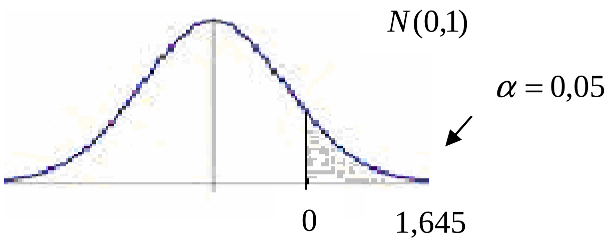
1. $H_0 : \mu = 14$

   $H_1 : \mu > 14$

2. $\alpha = 0{,}05$

3. Estadística para la prueba es (4.1), por que para el caso se conoce la varianza poblacional y además la variable aleatoria bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0{,}05$, es:



Rechazar $H_0 : \mu = 16$ si el valor de la estadística $Z > 1{,}645$, en caso contrario, no rechazarla.

5. Cálculo de la estadística *Z* (expresión (4.1))

   $\bar{x} = 16{,}48$ semestres, $\mu_0 = 14$ semestres, $\sigma = 8$ semestres y *n*= 40, reemplazando en (4.1), estos valores: $Z = \dfrac{16{,}48 - 14}{8/\sqrt{40}} = \dfrac{2{,}48}{8/6{,}33} = \dfrac{2{,}48}{1{,}26} = 1{,}97$

6. El valor de la estadística $Z = 1{,}97$ es mayor de 1,645, por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de la muestra aleatoria, si hay razones para asumir que la duración promedio para concluir los estudios de la carrera profesional de Derecho se ha incrementado, es decir es mayor de 14 semestres.

4.4.2 Cuando σ^2 no se conoce

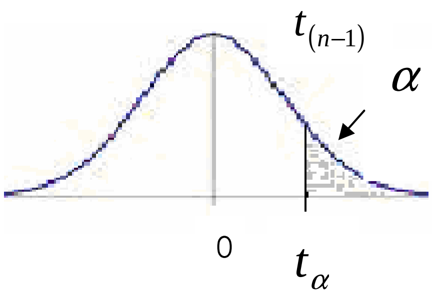
Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ una muestra aleatoria de tamaño n obtenida de una población normal con parámetros μ y σ^2 es desconocida, para someter a prueba las hipótesis:

(I)	(II)	(III)
$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Se emplea la estadística:

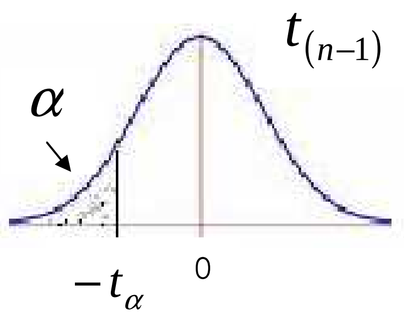
$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \qquad (4.2)$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



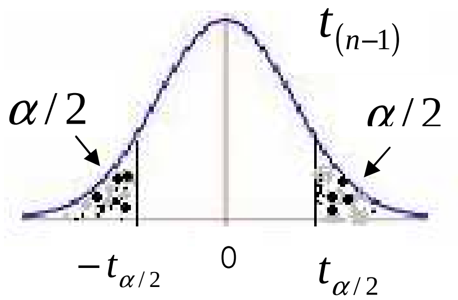
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T > t_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -t_{\alpha}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -t_{\alpha/2}$ ó $T > t_{\alpha/2}$ en caso contrario no se rechaza H_0

Obs. Esta prueba es recomendable cuando el tamaño de la muestra es pequeño.

Ejemplo 4.8

Los egresados de la EAP de Estadística, pueden ejercer la profesión como investigadores, en tal sentido la remuneración promedio que perciben es de 2800 soles mensuales; pero los egresados manifiestan que recientemente diversas instituciones de investigación de gestión estatal, demandan de sus servicios en este campo laboral y por tanto la remuneración promedio se ha incrementado. Una muestra aleatoria de 20 egresados, que laboran como investigadores juniors, tiene las siguientes remuneraciones mensuales:

2475	2685	3125	3004	3325	3692	3325	1875	2895	3125	2725
3325	3625	3325	2925	2625	3125	2925	3325	3625		

Verificar si lo manifestado por los egresados tiene sustento, considerando los resultados que da la muestra aleatoria. Las remuneraciones tienen distribución normal de probabilidad.

Solución

X: Remuneración mensual (soles)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ^2, es la varianza poblacional de las remuneraciones y es desconocida.

La prueba de hipótesis es:

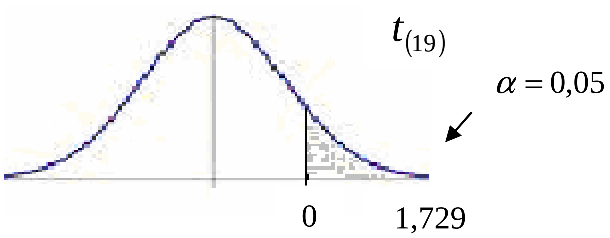
1. $H_0: \mu = 2800$

   $H_1: \mu > 2800$

2. $\alpha = 0{,}05$

3. Estadística para la prueba es (4.2), por que para el caso no se conoce la varianza poblacional y además la variable aleatoria bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0{,}05$, es:



   Rechazar $H_0: \mu = 2800$, si el valor de la estadística $T > 1{,}729$, en caso contrario, no rechazarla.

5. Cálculo de la estadística T (expresión (4.2))

   $\bar{x} = 3053{,}80$ soles, $\mu_0 = 2800$ soles, $s = 98{,}09$ soles y n= 20, reemplazando en (4.2), estos valores:

$$T = \frac{3053{,}80 - 2800}{438{,}67 / \sqrt{20}} = \frac{253{,}80}{438{,}67 / 4{,}47} = \frac{253{,}80}{98{,}09} = 2{,}59$$

6. El valor de la estadística $T = 2{,}59$ es mayor de 1,729, por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de la muestra aleatoria, la proposición de los egresados tiene sustento, la remuneración promedio poblacional de los egresados que trabajan en este campo laboral perciben más de 2800 soles.

4.5. Prueba para σ^2 de una población normal

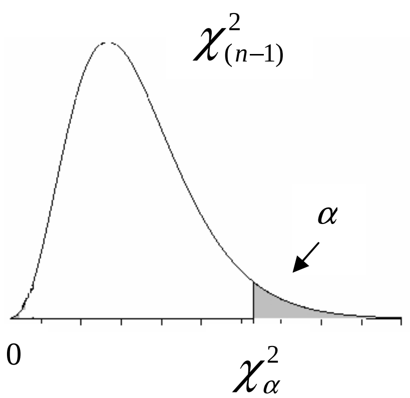
Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ una muestra aleatoria de tamaño n obtenida de una población normal con parámetros μ y σ^2, para someter a prueba las hipótesis:

(I)	**(II)**	**(III)**
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Se emplea la estadística:

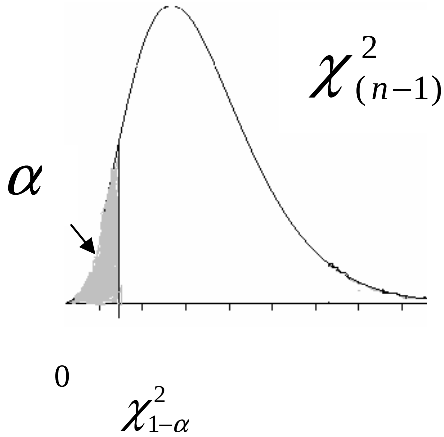
$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \qquad (4.3)$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



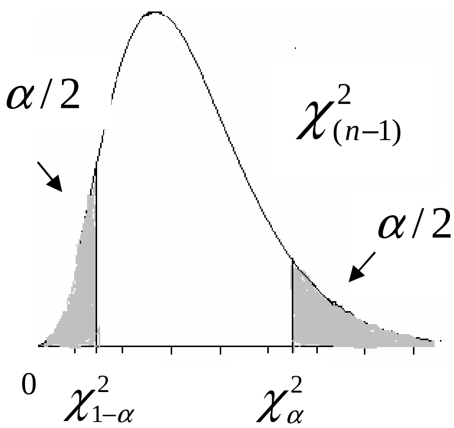
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $X^2 > \chi^2_{\alpha}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $X^2 < \chi^2_{1-\alpha}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $X^2 < \chi^2_{1-\alpha}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

Ejemplo 4.9

Considere el caso del ejemplo 2, para verificar si la varianza poblacional puede ser a lo sumo 190000 (soles)^2.

Solución

X: Remuneración mensual (soles)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ^2, es la varianza poblacional de las remuneraciones es desconocida.

La prueba de hipótesis es:

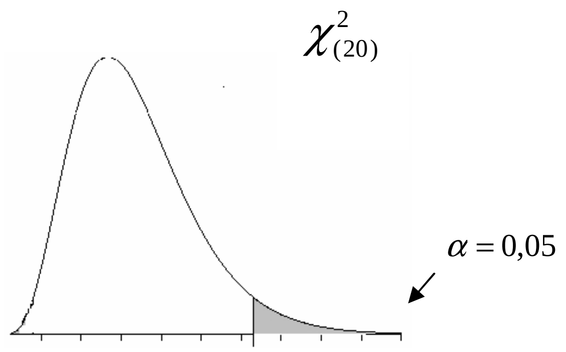
1. $H_0 : \sigma^2 \leq 190000$

   $H_1 : \sigma^2 > 190000$

2. $\alpha = 0{,}05$

3. Estadística para la prueba es (4.3), por que la variable aleatoria bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0{,}05$, es:



Rechazar $H_0 : \sigma^2 \leq 190000$, si el valor de la estadística $X^2 > 30{,}144$, en caso contrario no se rechaza H_0.

5. Cálculo de la estadística T (expresión (4.3))

   $s^2 = 192433{,}75 \text{ soles}^2$ y n= 20, reemplazando en (4.3), estos valores:

   $$X^2 = \frac{(19)192433{,}75}{190000} = \frac{3656241{,}25}{190000} = 19{,}24$$

6. El valor de la estadística $X^2 = 19{,}24$ no es mayor de 30,144, por tanto al 5% de nivel de significación no se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de la muestra aleatoria, podemos asumir que la varianza poblacional de las remuneraciones por trabajar como investigadores junior es a lo sumo 190000 soles^2.

4.6. Para π de una población binomial

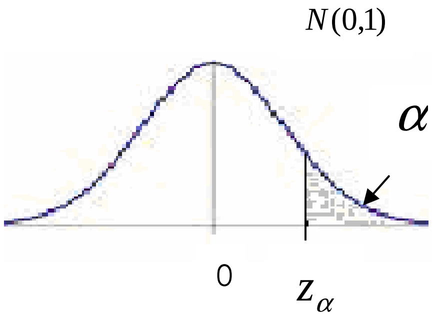
Sea $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n, suficientemente grande, obtenida de una población binomial con parámetro π, para someter a prueba las hipótesis:

(I)	(II)	(III)
$H_0 : \pi \leq \pi_0$	$H_0 : \pi \geq \pi_0$	$H_0 : \pi = \pi_0$
$H_1 : \pi > \pi_0$	$H_1 : \pi < \pi_0$	$H_1 : \pi \neq \pi_0$

Se emplea la estadística:

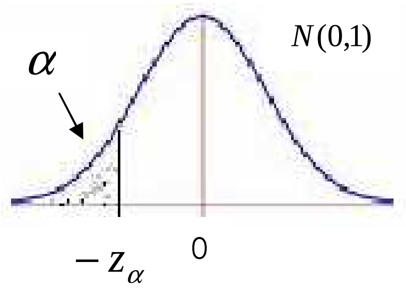
$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \sim N(0{,}1) \qquad (4.4)$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



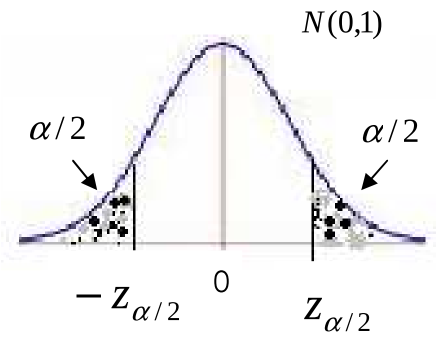
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z > z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -z_{\alpha/2}$ ó $Z > z_{\alpha/2}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

Ejemplo 4.10

En cierta investigación basada en una muestra aleatoria de 683 docentes, extraída de instituciones educativas de gestión estatal (IEGE) que no cuentan con laboratorio de cómputo, del nivel primario, se averiguo si participarían en una capacitación para enseñar Historia empleando las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TICs). En tal sentido, 254 indican que no participarían en la mencionada capacitación. Los investigadores responsables, manifiestan que si por lo menos el 50% de docentes de la mencionada población está de acuerdo con asistir a la capacitación, se ejecutará la misma. ¿Es posible realizar la capacitación?

Solución

X: Docente participa en la capacitación para enseñar Historia empleando TICs:

Sí (Categoría de interés para el estudio)

No

Por tanto el parámetro bajo estudio es:

π **:** Proporción poblacional de docentes que participa en la capacitación para enseñar historia empleando TICs (parámetro de una población binomial).

n = 683 (valor grande)

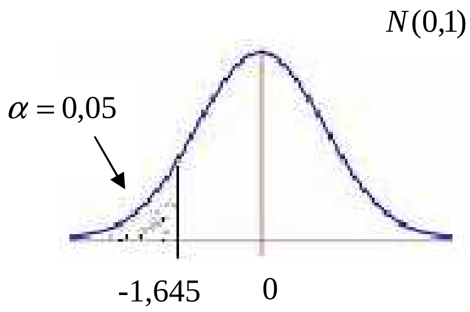
La prueba de hipótesis es:

1. $H_0 : \pi \geq 0{,}5$
   $H_1 : \pi < 0{,}5$

2. $\alpha = 0{,}05$

3. Estadística para la prueba es (4.4), por que para el caso el tamaño de muestra es grande y se somete a prueba a un parámetro de la población binomial.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0{,}05$, es:



Rechazar $H_0 : \pi \geq 0{,}5$, si el valor de la estadística $Z < -1{,}645$ en caso contrario, no rechazarla.

5. Cálculo de la estadística Z (expresión (4.4)

$p = \frac{254}{683} = 0{,}3719$ (Proporción muestral de docentes que van a participar en la mencionada capacitación) y $\pi_0 = 0{,}5$, reemplazando en (4.4), estos valores:

$$Z = \frac{0{,}3719 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{683}}} = \frac{-0{,}1281}{\sqrt{\frac{0{,}25}{683}}} = \frac{-0{,}1281}{\sqrt{0{,}0004}} = \frac{-0{,}1281}{0{,}02} = -6{,}405$$

6. El valor de la estadística $Z = -6{,}405$ es menor de -1,645, por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de la muestra aleatoria, hay razones para asumir que el porcentaje poblacional de docentes que van a participar en la mencionada capacitación no es por lo menos del 50%. Entonces se aconseja todavía no realizar la capacitación mencionada.

4.7 Prueba para $\mu_1 - \mu_2$ usando muestras independientes

Este tipo de pruebas es muy útil cuando se desea realizar análisis de diferencias entre dos grupos poblacionales, que pueden ser independientes o relacionadas.

Independientes, se refiere a que se elige la muestra aleatoria y se miden las variables independientemente, esto es, en cada grupo poblacional por separado.

Relacionadas, se refiere a que los mismos elementos o unidades estadísticas muestrales, se les mide la misma variable en dos condiciones distintas.

4.7.1 Cuando las varianzas poblacionales son conocidas

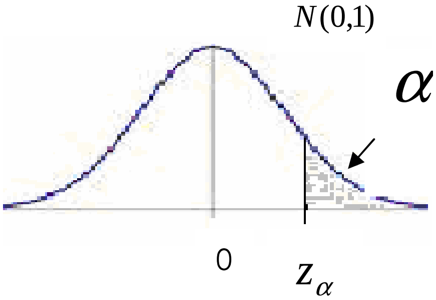
Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}$ una muestra aleatoria de tamaño n_1 obtenida de una población normal con parámetros μ_1 y σ_1^2 ; y sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_2}$ una muestra aleatoria de tamaño n_2 obtenida de una población normal con parámetros μ_2 y σ_2^2, siendo las varianzas poblacionales conocidas, entonces para someter a prueba las hipótesis:

(I)	**(II)**	**(III)**
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \le \mu_0$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \ge \mu_0$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \ne \mu_0$

Se emplea la estadística:

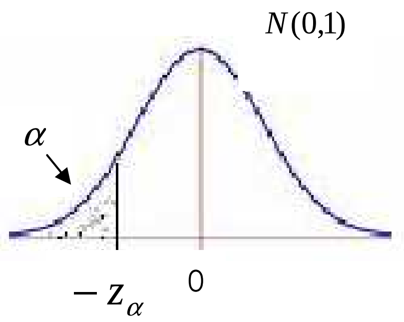
$$Z = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \qquad (4.5)$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



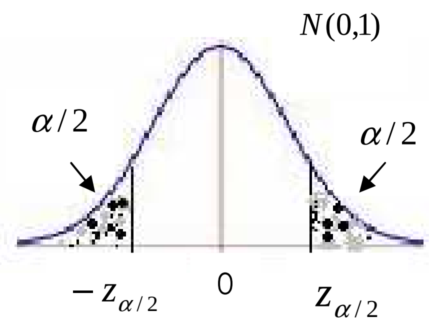
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z > z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -z_{\alpha/2}$ ó $Z > z_{\alpha/2}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

Obs. Cuando la muestra es grande de una población que no sea normal, pero tiene varianza finita, se usa el TLC, para usar esta prueba aún cuando no se conozca la varianza poblacional, se aproxima su valor con la varianza muestral, para cada población.

Ejemplo 4.11

Se aplica una prueba a los docentes de instituciones educativas de gestión estatal del nivel secundaria y primaria para evaluar la gestión de la alta dirección de la UGEL correspondiente. La prueba tiene puntajes comprendidos entre 10 -30, a mayor puntaje indica que los docentes consideran que le servicio es eficiente y además los puntajes de esta prueba tiene distribución normal de probabilidad con varianza poblacional igual a 100 para cada nivel. Se ha obtenido las siguientes estadísticas:

Nivel	Media muestral	Varianza muestral
Primaria	16,55	14,252
Secundaria	20,03	12,897

¿Los docentes de ambos niveles evalúan de igual forma, en promedio, la gestión de la alta dirección de la UGEL correspondiente? En cada población los puntajes tienen distribución normal de probabilidad.

Solución

X: Puntaje de la prueba que evalúa la gestión de la alta dirección de una UGEL.

Se trata de dos poblaciones:

1: Docentes del nivel primaria de instituciones educativas estatales.

$X \sim N(\mu_1, 100)$, la varianza poblacional del puntaje para este grupo, $\sigma_1^2 = 100$

2: Docentes del nivel secundaria de instituciones educativas estatales.

$X \sim N(\mu_2, 100)$, la varianza poblacional del puntaje para este grupo, $\sigma_2^2 = 100$

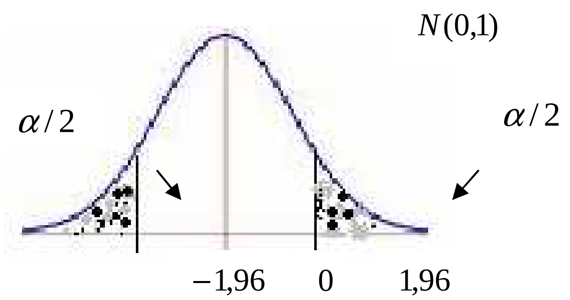
1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

   $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2. $\alpha = 0,05$

3. Estadística para la prueba es (4.5), por que para el caso se conocen las varianzas poblacionales y además la variable aleatoria bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0,05$, es:



   Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -1,96$ ó $Z > 1,96$, en caso contrario no se rechaza H_0.

5. Cálculo de la estadística Z (expresión (4.5)

   $\bar{x}_1 = 16,55$, $n_1 = 60$ y $\sigma_1^2 = 100$

   $\bar{x}_2 = 20,03$, $n_2 = 60$ y $\sigma_2^2 = 100$

   $\mu_0 = 0$, reemplazando en (4.5), estos valores:

$$Z = \frac{16,55 - 20,03}{\sqrt{\frac{100}{60} + \frac{100}{40}}} = \frac{-3,48}{\sqrt{1,67 + 2,5}} = \frac{-3,48}{4,17} = -0,83$$

6. El valor de la estadística $Z = -0{,}83$ no es mayor de -1,96, por tanto al 5% de nivel de significación no se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de las muestras aleatorias, los docentes de ambos niveles evalúan de igual forma en promedio la gestión de la alta dirección de la UGEL.

4.7.2 Cuando las varianzas poblacionales son desconocidas

En este caso, hay que distinguir si las varianzas poblacionales son iguales o diferentes, para ambos casos la distribución de probabilidad soporte es la t-Student.

Para verificar si son iguales s no las varianzas poblacionales, se usa una prueba estadística, que más adelante se tratará.

4.7.2.1 Cuando las varianzas poblacionales son iguales

Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}$ una muestra aleatoria de tamaño n_1 obtenida de una población normal con parámetros μ_1 y σ_1^2 ; y sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_2}$ una muestra aleatoria de tamaño n_2 obtenida de una población normal con parámetros μ_2 y σ_2^2, siendo las varianzas poblacionales desconocidas e iguales, entonces para someter a prueba las hipótesis:

(I)	**(II)**	**(III)**
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$

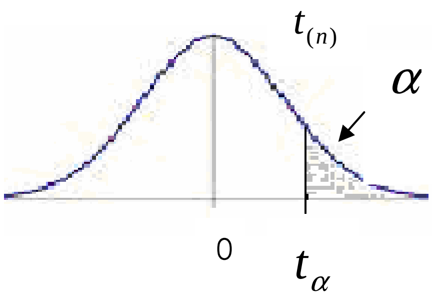
Se emplea la estadística:

$$T = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \mu_0}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{(n)} \qquad (4.6)$$

Siendo $n = n_1 + n_2 - 2$, los grados de libertad de la distribución de probabilidad t-Student; y la varianza combinada:

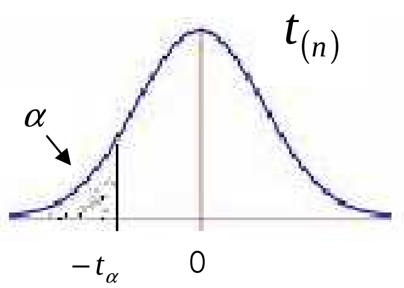
$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



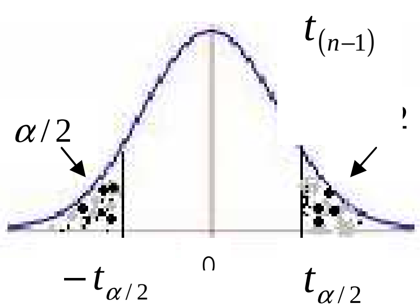
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T > t_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -t_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -t_{\alpha/2}$ ó $T > t_{\alpha/2}$ en caso contrario no se rechaza H_0.

Obs. Esta prueba es recomendable cuando los tamaños de muestra son pequeños.

Ejemplo 4.12

Conociendo los efectos que produce el Plomo (Pb) en sangre, en el desarrollo psicomotor de los niños, se consideró necesario profundizar la evaluación de ciertos parámetros de este tipo de desarrollo (coordinación visomanual y aprendizaje de la escritura), en los niños que viven en distritos de extrema pobreza y que cerca de sus viviendas existen depósitos de metales con alto contenido de plomo.

Las autoridades de salud indican que el nivel de plomo en sangre permisible es menos de 10 mg/dL. Se elige una muestra aleatoria de niños de edades entre 6 y 8 años, que estudian y viven cerca a estos depósitos, y se aplica el Test de Berry para medir los parámetros del desarrollo psicomotor mencionados. En base a la siguiente información verificar que Los niños que tienen niveles de plomo no permisible (mayor o igual a 10 mg/dL) tienen en promedio el desarrollo psicomotor menor que los que tienen niveles permisibles de plomo en base a la siguiente información:

Nivel de Pb (mg/dL)	**Niños**	**Media muestral**	**Varianza muestral**
$\geq$ 10	24	7,59	1
< 10	31	10,73	1,613

Los puntajes de este test tienen distribución normal de probabilidad, en cada grupo y con varianzas poblacionales desconocidas e iguales,

Solución

X: Puntaje del Test de Berry.

Se trata de dos poblaciones:

Niños con nivel de plomo mayor o igual de 10 mg/dL

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, la varianza poblacional del puntaje para este grupo no se conoce.

Niños con nivel de plomo menor de 10 mg/dL

$X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, la varianza poblacional del puntaje para este grupo no se conoce.

Además $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

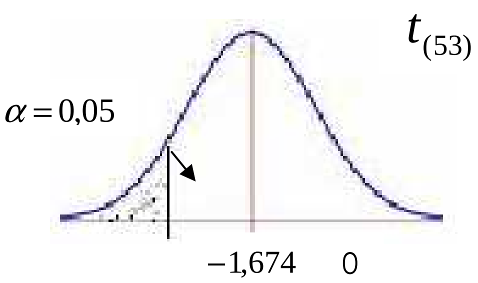
1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

2. $\alpha = 0,05$

3. Estadística para la prueba es (4.6), por que para el caso no se conocen las varianzas poblacionales y son iguales. Además la variable aleatoria bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0,05$, es:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -2,06$, en caso contrario no se rechaza H_0.

5. Cálculo de la estadística T (expresión (4.6)

$\overline{x}_1 = 7,59$, $n_1 = 24$ y $s_1^2 = 1$

$\overline{x}_2 = 10,73$, $n_2 = 31$ y $s_2^2 = 1,613$

$\mu_0 = 0$, previamente se calcula la varianza combinada:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$S_p^2 = \frac{(23)\,1 + (30)\,1{,}613}{53} = \frac{23 + 48{,}39}{53} = \frac{71{,}39}{53} = 1{,}35$$

$$S_p = \sqrt{1{,}35} = 1{,}16$$

Reemplazando en (4.6), estos valores:

$$T = \frac{7{,}59 - 10{,}73}{1{,}16\sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{31}}} = \frac{-3{,}14}{1{,}16\sqrt{0{,}042 + 0{,}032}} = \frac{-3{,}14}{1{,}16\sqrt{0{,}074}} = \frac{-3{,}14}{1{,}16(0{,}272)} = \frac{-3{,}14}{0{,}316} = -9{,}937$$

6. El valor de la estadística $T = -9{,}937$ y es menor de -1,673, por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de las muestras aleatorias, los niños de la población con niveles de plomo mayor o igual a 10 mg/dL, tienen puntaje promedio poblacional del Test de Berry, menor que los niños de la población con niveles de plomo menor de 10 mg/dL. Cabe indicar que el nivel de plomo en sangre influye en el desarrollo psicomotor de los niños.

4.7.2.2 Cuando las varianzas poblacionales no son iguales

Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}$ una muestra aleatoria de tamaño n_1 obtenida de una población normal con parámetros μ_1 y σ_1^2 ; y sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_2}$ una muestra aleatoria de tamaño n_2 obtenida de una población normal con parámetros μ_2 y σ_2^2, siendo las varianzas poblacionales desconocidas y diferentes, entonces para someter a prueba las hipótesis:

(I)	(II)	(III)
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \le \mu_0$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \ge \mu_0$	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \ne \mu_0$

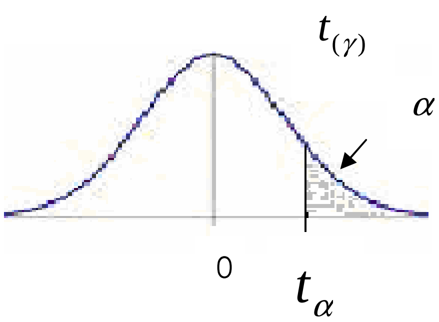
Se emplea la estadística:

$$T = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - \mu_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_{(\gamma)} \qquad (4.7)$$

Siendo γ los grados de libertad de la distribución de probabilidad t-Student; que se obtiene como la expresión (3.8), del capítulo 3.

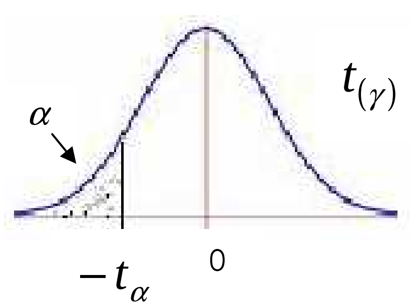
$$\gamma = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1}\right]^2}{n_1 - 1} + \frac{\left[\frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{n_2 - 1}}$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



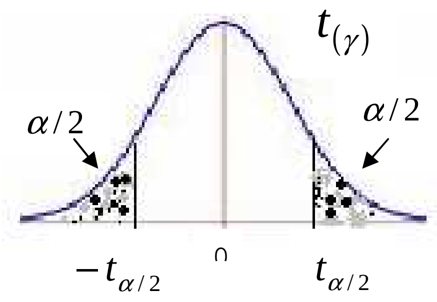
Rechazar H_0 si el valor de la estadística $T > t_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -t_{\alpha}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0 si el valor de la estadística $T < -t_{\alpha/2}$ ó $T > t_{\alpha/2}$ en caso contrario no se rechaza H_0.

Obs. Esta prueba es recomendable cuando los tamaños de muestra son pequeños.

Ejemplo 4.13

Se realiza un estudio para mejorar el aprendizaje del curso de matemáticas en niños del primer grado de educación secundaria de colegios estatales, basada en una muestra aleatoria de 40 niños, de esta población que tienen características similares tanto académicas como psicológicas. La mitad niños se les enseño matemáticas de manera tradicional (pizarra, tiza y materiales didácticos elaborados por el profesor) y a la otra mitad se le enseño matemáticas empleando computadora además de lo que tradicionalmente se emplea. Los resultados muestrales de los promedios del rendimiento en este curso, a mitad del año escolar, son:

Grupo	**Media muestral**	**Desviación estándar muestral**
Enseñanza tradicional	11,35	2,13
Enseñanza tradicional y uso de computadora	16,50	1,19

Los promedios tienen distribución normal de probabilidad, en cada grupo y con varianzas poblacionales desconocidas y diferentes. El responsable del estudio considera que enseñar matemáticas de manera tradicional y usando computadora mejora el rendimiento de estos alumnos.

Solución

X: Promedio del rendimiento del curso de matemáticas.

Se trata de dos poblaciones:

1: Enseñanza de matemáticas de manera tradicional.
$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, la varianza poblacional del promedio del rendimiento en este curso, para este grupo no se conoce.

2: Enseñanza de matemáticas de manera tradicional y usando computadora.
$X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, la varianza poblacional del promedio del rendimiento en este curso, para este grupo no se conoce.

Además $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

   $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

2. $\alpha = 0{,}05$

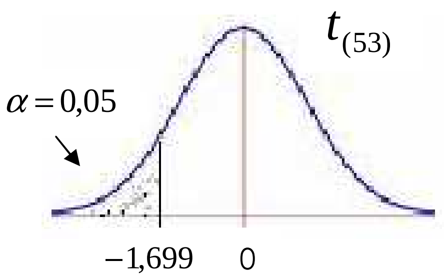
3. Estadística para la prueba es (4.6), por que para el caso no se conocen las varianzas poblacionales y son iguales. Además la variable aleatoria bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0{,}05$, pero previamente se debe calcular los grados de libertad empleando la expresión (3.8):

$$\gamma=\frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1}\right]^2}{n_1-1}+\frac{\left[\frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{n_2-1}}=\frac{\left[\frac{2{,}13^2}{20}+\frac{1{,}19^2}{20}\right]^2}{\frac{\left[\frac{2{,}13^2}{20}\right]^2}{19}+\frac{\left[\frac{1{,}19^2}{20}\right]^2}{19}}=\frac{\left[\frac{4{,}54}{20}+\frac{1{,}42}{20}\right]^2}{\frac{\left[\frac{4{,}54}{20}\right]^2}{19}+\frac{\left[\frac{1{,}42}{20}\right]^2}{19}}$$

$$\gamma=\frac{\left[\frac{5{,}96}{20}\right]^2}{\frac{[0{,}227]^2}{19}+\frac{[0{,}071]^2}{19}}=\frac{[0{,}298]^2}{\frac{0{,}052}{19}+\frac{0{,}005}{19}}=\frac{0{,}089}{\frac{0{,}057}{19}}=\frac{0{,}089}{0{,}003}=29{,}67$$

El máximo entero de 29,67 es 29 ; por tanto los grados de libertad son 29. Por tanto la región de rechazo es:



Rechazar H_0 si el valor de la estadística $T < -1{,}699$, en caso contrario no se rechaza H_0.

5. Cálculo de la estadística T (expresión (4.7)

   $\bar{x}_1 = 11{,}35$, $n_1 = 20$ y $s_1^2 = 4{,}54$

   $\bar{x}_2 = 11{,}35$, $n_2 = 20$ y $s_2^2 = 1{,}42$

   $\mu_0 = 0$, reemplazando en (4.7), estos valores:

$$T=\frac{11{,}35-16{,}50}{\sqrt{\frac{4{,}54}{20}+\frac{1{,}42}{20}}}=\frac{-5{,}15}{\sqrt{\frac{5{,}96}{20}}}=\frac{-5{,}15}{\sqrt{0{,}298}}=\frac{-5{,}15}{0{,}546}=-9{,}43$$

6. El valor de la estadística $T = -9{,}43$ y es menor de -1,699, por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de las muestras aleatorias, los alumnos de la población que aprenden matemáticas con método tradicional tienen rendimiento promedio en matemáticas menor que los alumnos de la población que aprenden

matemáticas con método tradicional y usan computadora. Cabe indicar que en el rendimiento promedio en matemáticas influye el método empleado.

4.8 Para $\mu_1 - \mu_2$ usando muestras relacionadas

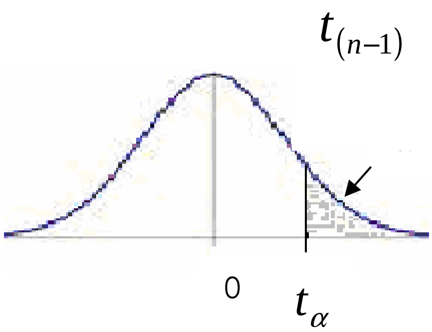
Las medias pueden ser comparas bajo el supuesto que las diferencias muestrales tiene distribución de probabilidad normal. Para someter apruebas las hipótesis estadísticas, tal que la hipótesis nula considerada es $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$:

(I)	**(II)**	**(III)**
$H_0 : \mu_D \leq 0$	$H_0 : \mu_D \geq 0$	$H_0 : \mu_D = 0$
$H_1 : \mu_D > 0$	$H_1 : \mu_D < 0$	$H_1 : \mu_D \neq 0$

Se emplea la estadística:

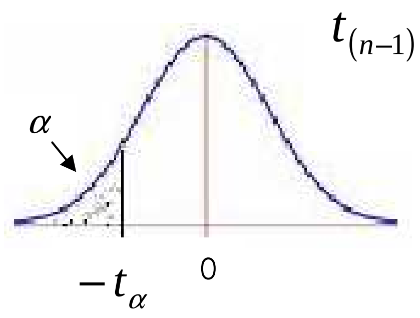
$$T = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)} \qquad (4.8)$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



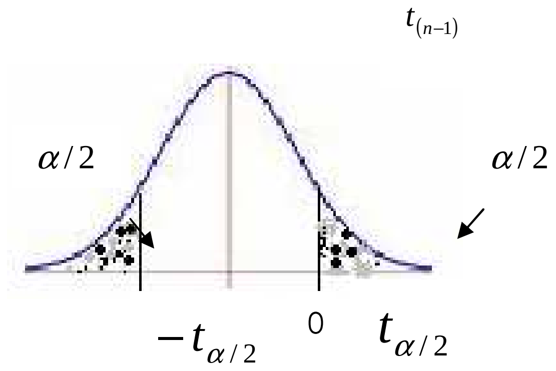
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T > t_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -t_{\alpha}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -t_{\alpha/2}$ ó $T > t_{\alpha/2}$ en caso contrario no se rechaza H_0.

Obs. Esta prueba es recomendable cuando el tamaño de muestra es pequeño.

Ejemplo 4.14

Enfermeras especialistas en salud pública, realizan una investigación a fin de contribuir a generar estrategias de solución a la problemática de salud sexual y reproductiva de los(as) adolescentes, en edad escolar. El estudio se realizó para evaluar el impacto de una intervención educativa encaminada mejorar sus conocimientos sobre educación sexual. La primera etapa del estudio se realizo durante 3 meses y con una muestra de 20 adolescentes escolares de ambos sexos. Antes de la intervención educativa y tres meses después se midió esta intervención empleando una prueba válida y confiable. Dando los siguientes resultados:

Alumno	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Antes	21	12	11	18	20	15	20	18	23	16
Después	27	17	16	23	24	21	24	19	23	19
Alumno	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Antes	18	18	14	20	17	14	14	18	21	17
Después	24	20	19	27	22	18	21	26	28	23

¿La intervención educativa mejora los conocimientos sobre educación sexual, en esta población?

Solución

X: Puntaje de la prueba que mide el nivel de conocimientos sobre educación sexual en adolescentes escolares.

Esta variable se mide en dos ocasiones a la muestra de 20 alumnos.

1: Antes de la intervención educativa.

2: Después de la intervención educativa.

Para cada par de mediciones se calcula la diferencia de los puntajes, y se muestra en la siguiente tabla:

Alumno	Antes	Después	Diferencia muestra (d_i)
1	21	27	-6
2	12	17	-5
3	11	16	-5
4	18	23	-5
5	20	24	-4
6	15	21	-6
7	20	24	-4
8	18	19	-1
9	23	23	0
10	16	19	-3
11	18	24	-6
12	18	20	-2
13	14	19	-5
14	20	27	-7
15	17	22	-5
16	14	18	-4
17	14	21	-7
18	18	26	-8
19	21	28	-7
20	17	23	-6
Total			-96

Las diferencias tienen distribución normal de probabilidad. La prueba de hipótesis es como sigue:

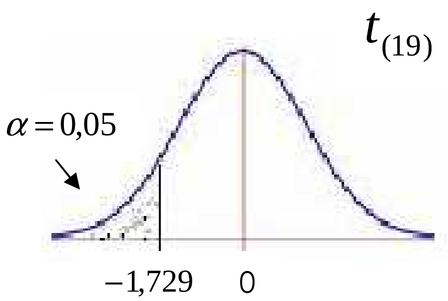
1. $H_0 : \mu_D = 0$

   $H_1 : \mu_D < 0$

2. $\alpha = 0,05$

3. Estadística para la prueba es (4.7), por que se trata de muestra apareada o relacionada. Además las diferencias muestrales bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0{,}05$ es:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $T < -1{,}729$, en caso contrario no se rechaza H_0.

5. Cálculo de la estadística T (expresión (4.8)

Previamente calculamos la media o promedio de las diferencias muestrales:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{20} d_i}{n} = \frac{-96}{20} = -4{,}8$$

También la cuasi-varianza de las diferencias muestrales:

$$S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{20}\left(d_i - (-4{,}8)\right)^2}{19} = \frac{81{,}2}{19} = 4{,}27$$

Siendo la desviación estándar muestral de las diferencias muestrales es:

$$s_d = \sqrt{4{,}27} = 2{,}07$$

$\mu_D = 0$, reemplazando en (4.8), estos valores:

$$T = \frac{-4{,}8}{2{,}07/\sqrt{20}} = \frac{-4{,}8}{2{,}07/4{,}47} = \frac{-4{,}8}{0{,}46} = -10{,}435$$

6. El valor de la estadística $T = -10{,}435$ y es menor de -1,729, por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de la muestra aleatoria, la intervención educativa mejora el nivel de conocimientos promedio poblacional sobre educación sexual en esta población, en su primera etapa.

4.9. Para la igualdad de varianzas poblacionales

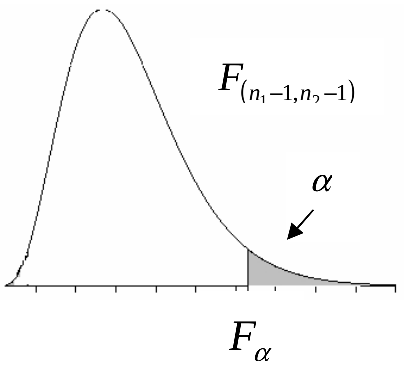
Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}$ una muestra aleatoria de tamaño n_1 obtenida de una población normal con parámetros μ_1 y σ_1^2 y sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_2}$ una muestra aleatoria de tamaño n_2 obtenida de una población normal con parámetros μ_2 y σ_2^2, para someter a prueba las hipótesis:

(I)	**(II)**	**(III)**
$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Se emplea la estadística:

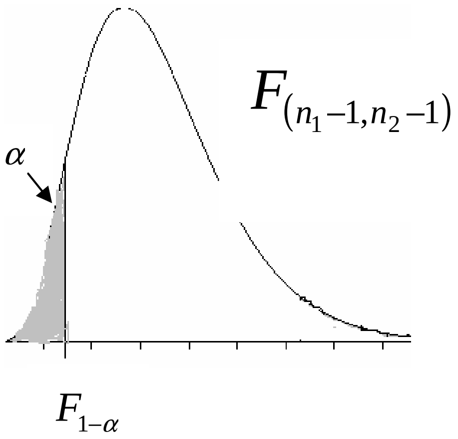
$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)} \qquad (4.9)$$

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



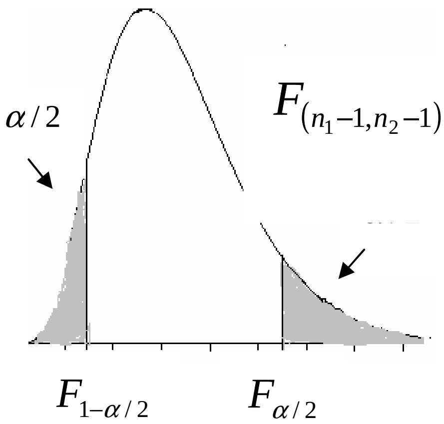
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $F > F_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $F < F_{1-\alpha}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $F < F_{1-\alpha/2}$ ó $F > F_{\alpha/2}$, en caso contrario no se rechaza H_0.

Ejemplo 4.15

Considere los datos del ejemplo 4.13, para verificar si se puede considerar que las varianzas poblaciones, de los grupos poblaciones bajo estudio, son diferentes.

Solución

X: Promedio del rendimiento del curso de matemáticas.

Se trata de dos poblaciones:

1: Enseñanza de matemáticas de manera tradicional
$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, la varianza poblacional del promedio del rendimiento en este curso, para este grupo no se conoce.

2: Enseñanza de matemáticas de manera tradicional y usando computadora.
$X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, la varianza poblacional del promedio del rendimiento en este curso, para este grupo no se conoce.

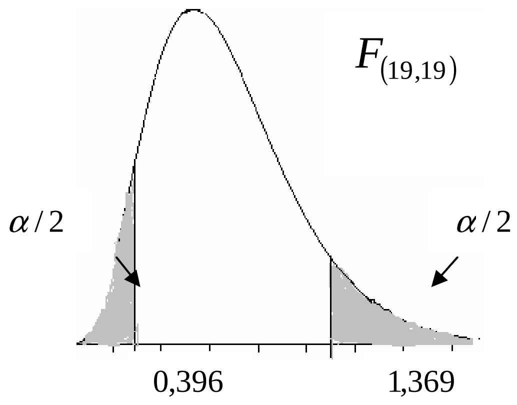
Verificando que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

1. $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
   $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. $\alpha = 0{,}05$

3. Estadística para la prueba es (4.9), por que la variable aleatoria bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

4. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0{,}05$ es:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $F < 0{,}396$ ó $F > 1{,}369$, en caso contrario no se rechaza H_0.

5. Cálculo de la estadística *F* (expresión (4.9)

   $s_1^2 = 4{,}54$ y $s_2^2 = 1{,}42$

   Reemplazando en (4.9), estos valores:

   $$F = \frac{4{,}54}{1{,}42} = 3{,}2$$

6. El valor de la estadística $F = 3{,}2$ es mayor de 1,369, por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de las muestras aleatorias, las muestras aleatorias (rendimiento promedio de los alumnos en matemáticas) provienen de poblaciones normales con varianzas poblacionales diferentes.

4.10. Para $\pi_1 - \pi_2$ de poblaciones binomiales

Sea $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_1}$ una muestra aleatoria de tamaño n_1 obtenida de una población binomial con parámetro π_1; y sea normal $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n_2}$ una muestra aleatoria de tamaño n_2 obtenida de una población binomial con parámetro π_2, con n_1 y n_2 suficientemente grandes.

Para someter a prueba las hipótesis:

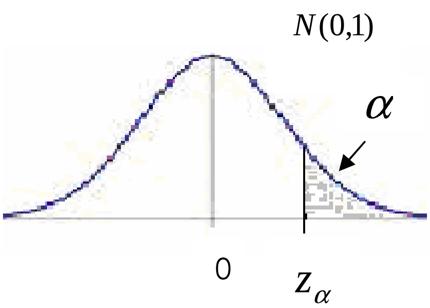
(I)	**(II)**	**(III)**
$H_0 : \pi_1 - \pi_2 \leq \pi_0$	$H_0 : \pi_1 - \pi_2 \geq \pi_0$	$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = \pi_0$
$H_1 : \pi_1 - \pi_2 > \pi_0$	$H_1 : \pi_1 - \pi_2 < \pi_0$	$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq \pi_0$

Se emplea la estadística:

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1) \qquad (4.10)$$

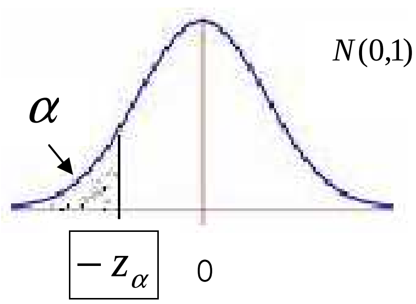
Siendo p la proporción poblacional estimada de éxitos con respecto a la muestra $n = n_1 + n_2$.

I. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



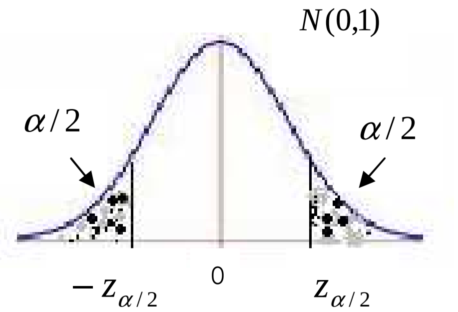
Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z > z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

II. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -z_\alpha$, en caso contrario no se rechaza H_0.

III. Cuya región de rechazo de tamaño α está dada por:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -z_{\alpha/2}$ ó $Z > z_{\alpha/2}$ en caso contrario no se rechaza H_0.

Ejemplo 4.16

Se realiza un estudio para mejorarla enseñanza del curso estadística inferencial en alumnos de pregrado, del tercer ciclo de estudios, para tal efecto se realiza un estudio basal en muestras aleatorias de alumnos de este ciclo de estudios de las EAP de Genética y Biotecnología y de la EAP Sociología, al final del curso y se les pide que interpreten la estimación de la media poblacional mediante intervalo de confianza, entre otras preguntas. Los resultados son:

EAP	**Muestra**	**Interpretación correcta**
Genética y Biotecnología	60	46
Sociología	70	50
Total	130	96

¿Existen diferencias entre las proporciones poblacionales de interpretación correcta del intervalo de confianza para la media poblacional, entre los alumnos de estas Escuelas?

Solución

X: Interpretación del intervalo de confianza para una media poblacional.

- Correcto (Categoría de interés para el estudio)
- Incorrecto

Se trata de dos poblaciones:

1: Alumnos de la EAP de Genética y Biotecnología

Cuyo parámetro bajo estudio es:

π_1: Proporción poblacional de alumnos que correctamente interpretan el intervalo de confianza para una media poblacional, de la EAP de Genética y Biotecnología (parámetro de una población binomial).

n_1=60 y $p_1 = \frac{46}{60} = 0,7667$ (proporción muestral obtenida con la muestra de la población 1).

2: Alumnos de la EAP de Sociología

Cuyo parámetro bajo estudio es:

π_2: Proporción poblacional de alumnos que correctamente interpretan el intervalo de confianza para una media poblacional, de la EAP de Sociología (parámetro de una población binomial).

n_2 =70 y $p_2 = \frac{50}{70} = 0,7143$ (proporción muestral obtenida con la muestra de la población 2).

La prueba de hipótesis es:

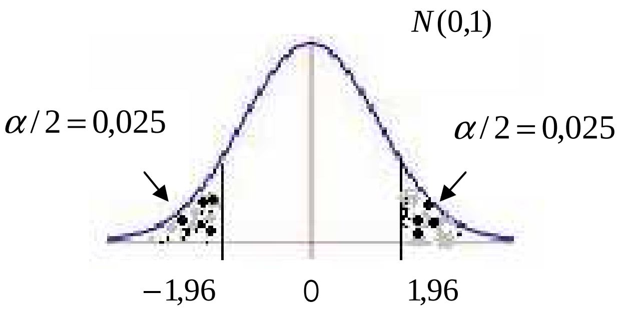
7. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$

   $H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

8. $\alpha = 0,05$

9. Estadística para la prueba es (4.10), los tamaños de muestra son grandes.

10. La región de rechazo, de tamaño $\alpha = 0,05$, es:



Rechazar H_0, si el valor de la estadística $Z < -1,96$ ó $Z > 1,96$. En caso contrario no se rechaza H_0.

11. Cálculo de la estadística Z (expresión (4.10)

$p = \frac{96}{130} = 0,7385$ y $1 - p = 0,2615$, reemplazando en (4.10), los valores obtenidos:

$$Z = \frac{0,7667 - 0,7143}{\sqrt{0,7385(0,2615)\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{70}\right)}} = \frac{0,0524}{\sqrt{0,1931(0,0167 + 0,0143)}} = \frac{0,0524}{\sqrt{0,1931(0,0310)}}$$

$$Z = \frac{0,0524}{\sqrt{0,006}} = \frac{0,0524}{0,0775} = 0,6761$$

12. El valor de la estadística $Z = 0{,}6761$, no es mayor de 1,96; por tanto al 5% de nivel de significación se rechaza la hipótesis nula, esto es, ante la evidencia de las muestras aleatorias, hay razones para asumir que el porcentaje poblacional de alumnos que interpretan correctamente un intervalo de confianza para la media poblacional son iguales para las dos escuelas profesionales.

APLICACIONES

4.1 Una reportera de la revista PENTIUM elige una muestra aleatoria de 30 lectores docentes universitarios y les pregunta:

¿Hace cuantos años compró su primera computadora para realizar tareas académicas en su hogar? Las respuestas son:

6	4	10	8	3	11	2	7	4	9
11	4	6	7	3	8	5	9	4	7
7	8	4	7	11	9	3	10	3	2
9	3	8	7	6	7	5	5	4	7

1) Se quiere verificar que en promedio los docentes universitarios compraron su primera computadora hace 5 años, y siendo la varianza poblacional 9 años^2. Además la variable bajo estudio tiene distribución normal de probabilidad.

2) Repetir el ejercicio anterior bajo el supuesto que la varianza poblacional es desconocida. Compare este resultado con el anterior.

3) Se cree que el valor de la varianza poblacional ha disminuido, es decir es menor de 9 años^2. ¿Cuál es su opinión, en que se basa?

4.2 En una capacitación sobre manejo de Internet para gestión del conocimiento, dirigida a docentes de ciencias sociales del nivel superior; se aplicó una prueba de entrada y se pregunta a los 276 asistentes: “¿Sabe que es URL?”, 53 dicen que sí. Se presume que en esta población el 30% de docentes si saben lo que es URL ¿Podemos considerar tal presunción?

4.3 En la autoevaluación de una facultad se aplica un cuestionario que mide la satisfacción de los docentes de los departamentos académicos, respecto a la gestión y funcionamiento de la facultad, que se refiere a las facilidades que tiene para su desarrollo profesional, al reconocimiento de su trabajo, participación en la toma de decisiones, entre otros. El cuestionario tiene una escala de 20 a 80, a mayor puntaje indica alta satisfacción de los docentes encuestados. Los datos según sexo del docente son:

Masculino	60	47	56	66	70	50	61	66	70	50
	47	57	62	58	61	51	67	48	59	68
	63	49	71	68	59	52	64	53	65	59
Femenino	38	23	28	42	29	30	50	38	36	47
	33	35	51	35	31	37	22	38	31	40
	41	28	42	46	31	47	48	30	50	35

Estos puntajes tienen distribución normal de probabilidad, se solicita:

1) Verificar si tienen varianzas poblacionales iguales.

2) Verificar si en promedio las docentes de esta facultad muestran menor satisfacción sobre la gestión y funcionamiento de la misma, respecto a los docentes.

4.4 En los previos a un examen los alumnos padecen de alto nivel de estrés, estudios especializados reportan que en la Facultad de Ciencias Matemáticas un 60% de alumnos padecen de estrés. Se cree que este porcentaje poblacional ha decrecido últimamente por que se cuenta con asesoría especializada desde el semestre anterior. Para verificar este supuesto se elige una muestra aleatoria de 417 alumnos, de esta población, a dos días del examen y se encuentra que 159 tienen alto nivel de estrés. ¿La asesoría especializada es efectiva?

4.5 En un estudio sobre comportamiento ético en estudiantes universitarios (pregrado) se aplica un cuestionario a una muestra aleatoria de alumnos de esta población; en particular sobre la pregunta: "¿Está de acuerdo que una autoridad favorezca a sus amigos docentes para su ratificación y/o promoción docente?". Las respuestas son:

Ciclo de Estudios	Muestra	Si están de acuerdo
Tercero	280	56
Noveno	159	56
Total	439	112

Se considera que los alumnos del último año son más tolerantes por tanto la proporción poblacional de éstos alumnos que están de acuerdo que una autoridad favorezca a sus amigos docentes para su ratificación y/o promoción docente, es mayor que en la población de los alumnos del tercer ciclo de estudios. ¿Es significativo este supuesto?

4.6 Estudiosos de las ciencias sociales indican que el origen socio-económico y socio-educativo de las personas opera como un factor importante en la determinación de sus posibilidades y de sus logros; motivo por el cual se desea saber si los alumnos del nivel primaria que provienen de hogares con alto clima educativo en el hogar (padres con más de 13 años de estudios) tiene mayor rendimiento académico que los alumnos que provienen de hogares con bajo clima educativo en el hogar (padres de 0 a 6 años de estudios). Los resultados al aplicar una prueba de comprensión lectora a muestras de alumnos son:

Clima educativo bajo	56	45	35	46	45	35	56	25	35	47
	62	53	66	54	47	55	43	35	26	35
	33	26	46	56	20	34	56	43	52	36
	49	24	56	43	52	36	49	24		
Clima educativo alto	57	60	61	66	57	70	63	57	42	54
	64	55	68	56	70	59	53	60	59	49
	58	51	59	47						

Si el puntaje tiene distribución normal de probabilidad, para casa grupo poblacional:

1) Verificar si la varianza del puntaje de la prueba de comprensión lectora del grupo de clima educativo bajo es diferente del grupo de clima educativo alto.

2) ¿El promedio del puntaje de la prueba de comprensión lectora del grupo de clima educativo bajo es menor que del grupo de clima educativo alto?

4.7 La conciencia ambiental en los ciudadanos es un problema no solo para municipios, técnicos y políticos sino también para las autoridades educativas, en particular para los de al educación superior. En tal sentido, sea ha diseñado una capacitación que permite una formación con conciencia ambiental crítica en estudiantes universitarios, para verificar si produce cambios positivos se elige al azar a una muestra aleatoria de 26 estudiantes de este nivel. A esta muestra se evalúa empleando una prueba confiable y válida antes de iniciarse la capacitación y cuando concluye sobre conciencia ambiental crítica. Las diferencias de los puntajes obtenidos (antes- después) son:

-6	-5	-5	-5	-3	-3	-4	-7	-8	-9	0	-5
-7	-5	-6	-3	-5	-5	-7	-4	-8	-7	-4	-4
-7	-7	-4	-7								

Si estas diferencias tienen distribución normal de probabilidad, verificar si la capacitación tiene buen efecto sobre el incremento de conciencia ambiental. (Las diferencias negativas indican que la capacitación tiene efecto positivo para con la conciencia ambiental de los sujetos)

4.8 En un estudio sobre el nivel de conocimientos que tiene el profesor de nivel primaria recién graduado de los recursos de la TIC, para el aprendizaje de sus alumnos. Se aplico un cuestionario (0 - 20) para tal fin a una muestra de 25 docentes de esta población, siendo los resultados:

10 14 11 12 9 5 17 18 10 12 16 12 11
8 11 9 10 13 11 9 13 11 8 10 14

Verificar que en promedio esta población tiene a lo sumo 14 de nivel de conocimientos.

1) Cuando la varianza poblacional se conoce y es igual a 46.

2) Cuando la varianza poblacional es desconocida.

4.9 Considere el ejercicio 4.8, para verificar si la varianza poblacional es diferente de 50

4.10 Se está planificando implementar la enseñanza del idioma chino mandarín en la Facultad de Ciencias Empresariales de una Universidad estatal, los resultados basados en muestras aleatorias son:

EAP	Muestra Aleatoria	De acuerdo
Administración	309	188
Economía	400	247

¿La proporción de alumnos de la EAP de Administración, que manifiestan estar de acuerdo para que se implemente es mayor que la de la EAP de Economía.

4.11 La gestión del director de una Institución Educativa es un factor clave para lograr la calidad educativa. Preocupados por esta situación un equipo multidisciplinarios elabora una capacitación especial, para formar directores con suficiente capacidad de gestión. Para validarlo emplea una muestra aleatoria de 34 directores de Instituciones Educativas de gestión estatal, estos docentes son evaluados antes y al final de la capacitación sobre diversos aspectos de la gestión. A mayor puntaje obtenido indica mayor capacidad de gestión para con la dirección de la Institución Educativa. Los resultados son:

Director	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Antes	20	19	16	23	23	18	23	21	26	27	21	21
Después	26	23	20	31	28	22	28	23	27	32	28	24
Director	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Antes	17	16	21	17	17	21	24	20	18	24	15	17
Después	21	22	25	21	25	30	32	25	23	29	21	22
Director	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**		

Antes	24	20	18	23	21	26	27	21	21	17
Después	30	27	25	30	23	27	32	26	24	23

¿La capacitación tuvo buen efecto?

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

5.1 Introducción

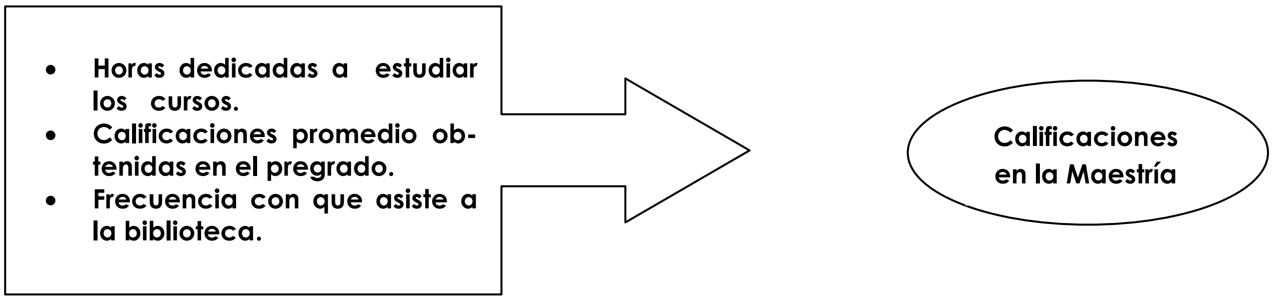
Al analizar un conjunto de datos bivariados es conveniente obtener algún conocimiento acerca de la relación que puede existir entre estas variables cuantitativas, por ejemplo, analizar la relación entre:

X	Y	UNIDAD ESTADÍSTICA
Ingresos	Egresos	Hogar de Lima Metropolitana
Peso	Edad	Alumno de nivel inicial en VES
Ingresos generados	Gastos	Institución Educativa de SJL
Puntaje en prueba de habilidad matemática	Puntaje en prueba de habilidad verbal	Alumno de nivel secundaria en Ate

La naturaleza e intensidad de las relaciones entre variables pueden ser examinadas por medio del análisis de regresión y correlación, dos técnicas estadísticas relacionadas pero que sirven para propósitos diferentes.

En este capítulo analizaremos conjuntamente dos variables cuantitativas, una de ellas llamada variable dependiente o de respuesta (y) cuyo comportamiento se debe o se explica por otra variable llamada independiente (x), a ésta última se le denomina también variable explicativa o variable regresora.

Pero en muchas situaciones no es suficiente una variable regresora para explicar la variable de respuesta, por el contrario se necesita más de una variable; por ejemplo para explicar las calificaciones obtenidas por los estudiantes de las maestrías en Educación en su primer semestre:



Presentaremos en primer lugar el modelo de regresión lineal simple para estudiar la naturaleza de la relación entre una variable regresora (x) y una variable de respuesta (y); para luego presentar el modelo de regresión lineal múltiple cuando el comportamiento de una variable de respuesta (y) es explicado por un conjunto de variables regresoras (x_1, x_2, x_3,….x_p)

5.2 Modelo de regresión lineal simple

Para obtener un modelo que permita explicar los puntajes en estrategias metodológicas (y) obtenidas por las Promotoras Educativas Comunitarias a partir de los puntajes en estilos de aprendizaje(x), se selecciona una muestra de 39 PEC (Promotoras Educativas Comunitarias) que atienden a niños y niñas de 3 a 5 años, en las regiones de extrema pobreza, la que proporcionó los siguientes resultados:

Nº	*y*	*X*
1	19	4
2	28	6
3	25	6
4	28	6
5	23	6
6	27	6
7	23	5
8	25	4
9	15	4
10	20	4

Nº	*Y*	*X*
11	16	5
12	26	6
13	15	2
14	12	4
15	27	4
16	13	7
17	11	4
18	18	4
19	26	5
20	14	3

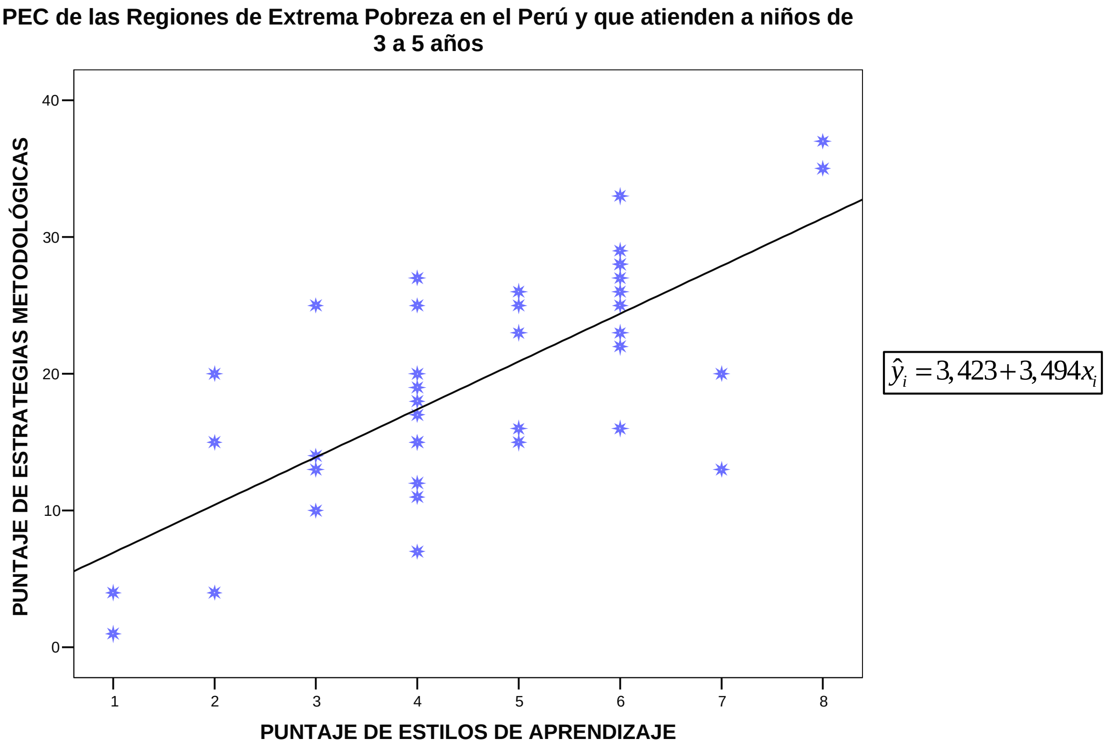
Nº	*y*	*x*
21	25	3
22	20	2
23	33	6
24	35	8
25	22	6
26	37	8
27	29	6
28	25	5
29	13	3
30	15	4

Nº	*y*	*x*
31	15	5
32	16	6
33	17	4
34	1	1
35	10	3
36	20	7
37	7	4
38	4	2
39	4	1

Como se observa para cada PEC se ha registrado el valor de "x" y el valor de "y" de manera conjunta, por ejemplo la observación 8 se lee como:

La PEC número 8 obtuvo una calificación de 25 en estrategias metodológicas y 4 en estilos de aprendizaje.

Gráfico 5.1



En el gráfico de dispersión de las variables, observamos que la relación es como sigue: cuanto mayor es el puntaje de estilos de aprendizaje, mayor es el puntaje en estrategias metodológicas.

Lo que significa que para analizar los datos y determinar si el puntaje de estilos de aprendizaje es significativo para explicar la naturaleza de los puntajes en estrategias metodológicas utilizaremos el analisis de regresión lineal simple.

Pero cuando se desea explicar la naturaleza de la variable puntajes que se obtiene en la prueba para evaluar las estrategias metodológicas empleadas por las PEC en relación a más de una variable independiente o regresora, el analisis de datos se hace mediante el análisis de regresion lineal múltiple.

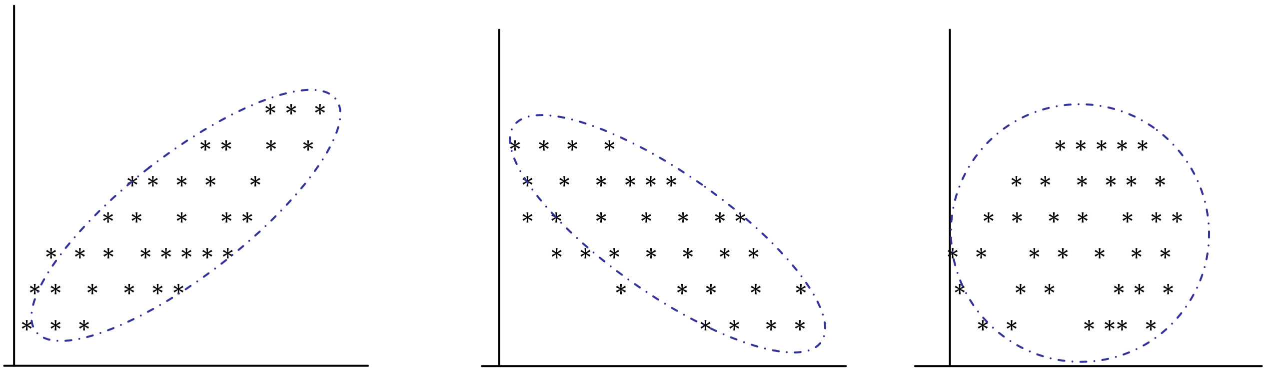
5.3 Gráfico o Diagrama de dispersión

Es de gran utilidad en el estudio de la relación entre dos variables, los puntos graficados nos mostrarán la naturaleza y la fuerza de la relación entre dichas variables:

5.4 Gráfico o diagrama de dispersión

Es de gran utilidad en el estudio de la relación entre dos variables, los puntos graficados nos mostrarán la naturaleza y la fuerza de la relación entre dichas variables:

Gráfico 5.2



(a) Relación lineal creciente (b) Relación lineal decreciente (c) No existe relación lineal

En el gráfico (a), las variables (x, y) se incrementan mostrando una tendencia lineal; en el gráfico (b) las variables muestran una relación inversa y lineal, al incrementarse los valores de x disminuyen los valores de y; y en el caso (c) no se observa ninguna relación entre las variables.

5.4. Modelo de regresión lineal simple poblacional

Para las variables bajo estudio, **el modelo** se escribe:

$$\boxed{y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon} \qquad (5.1)$$

Es la ecuación que describe como se relaciona "*y*" con "*x*" y el término error aleatorio.

Donde:

y : variable dependiente o de respuesta. Es la variable por modelar o predecir.

x : variable independiente o regresora. Es la variable que se utiliza para modelar o predecir.

β_0: parámetro del modelo; es la ordenada en el origen,

β_1: parámetro del modelo, pendiente de la recta, indica la magnitud del incremento o decremento de *y* por cada unidad de incremento en *x*.

ε: error o perturbación aleatoria, explica la variabilidad en ***y*,** que no puede ser explicada en el modelo.

Supuestos:

1. Los valores de la variable independiente "*x*" son "fijos".
2. La variable "*x*" se mide sin error (se desprecia el error de medición en *x*)
3. Los errores son aleatorios, se distribuyen normalmente con media cero y variancia uno.

5.5. Estimación de los Parámetros del Modelo de regresión lineal simple

El modelo de regresión lineal simple ajustado, se obtiene en base a los datos de una muestra:

$$\boxed{\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x} \qquad (5.2)$$

Donde:

$\hat{y}$: Es el valor estimado de *y* para un determinado valor de *x*.

$\hat{\beta}_0$

: Es el estimador de la ordenada en el origen.

$\hat{\beta}_1$: Es el estimador de la pendiente de la recta.

Para estimar los parámetros del modelo se utiliza el **Método de los mínimos cuadrados**, que es un procedimiento que permite encontrar los estimadores de los parámetros del modelo, que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores de la variable de respuesta (valores de la muestra) y los valores estimados de la variable de respuesta(obtenidos en la ecuación estimada de regresión):

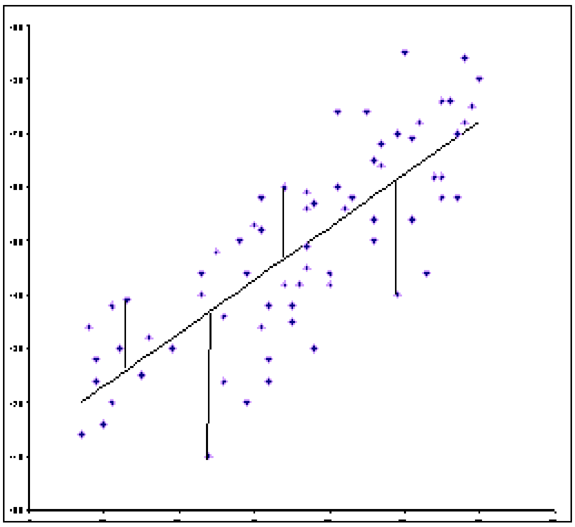
$$\boxed{mín\ \boldsymbol{SCE} = mín \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2}$$

Donde:

y i : Es el valor observado de la variable de respuesta para la i-ésima observación.

$\hat{y}_i$: Es el valor estimado de la variable de respuesta para la i-ésima observación.

Gráfico 5.3



Utilizando el cálculo diferencial se puede demostrar que los valores que minimizan la expresión (5.3), se pueden obtener a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\left.\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0}\right|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial SCE}{\partial \beta_1}\right|_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (5.5)$$

Resolviendo (5.4) y (5.5) se obtiene:

$$\hat{\beta}_o = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Ejemplo 5.1: Para obtener un modelo que permita explicar los puntajes en estrategias metodológicas (y) obtenidas por las Promotoras Educativas Comunitarias a partir de los puntajes en estilos de aprendizaje, se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(39x3887) - (179x759)}{(39x937) - (179)^2} = 3,494$$

$$\hat{\beta}_o = \left(\frac{759}{39}\right) - 3,494\left(\frac{179}{39}\right) = 3,423$$

El modelo ajustado de regresión lineal simple para este caso es:

$$\boxed{\hat{y}_i = 3,423 + 3,494 x_i}$$

La pendiente es 3,494 y se puede interpretar como el incremento promedio en el puntaje de las estrategias metodológicas de las PEC, debido a sus puntajes de estilo de aprendizaje.

Como los valores de la variable puntajes de estilo de aprendizaje, están cerca al origen (ver Gráfico 5.1), el valor 3,423 es el puntaje promedio de las estrategias metodológicas de las PEC.

La Tabla 5.1 muestra los cálculos previos para obtener las estimaciones de los parámetros del modelo.

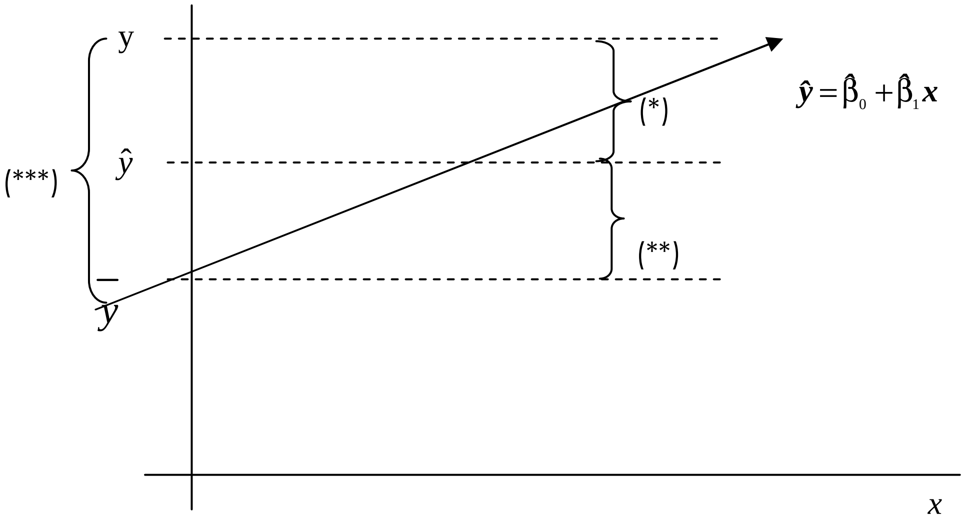
5.6. Evaluación del ajuste global del modelo

Realizado el ajuste, queremos determinar ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos? Una medida de evaluación del ajuste global del modelo es el coeficiente de determinación.

5.6.1 Coeficiente de determinación “R^2”. Es una medida que se utiliza para evaluar la bondad del ajuste del modelo de regresión lineal simple.

Luego de realizar el ajuste del modelo, se tiene para una observación lo siguiente:

Gráfico 5.4



Desviación total = Desviación explicada + Desviación no explicada

$$y_i - \bar{y} \qquad = \qquad \hat{y}_i - \bar{y} \qquad + \qquad y_i - \hat{y}_i$$

Si se miden estas desviaciones para cada valor de la variable de respuesta, se eleva al cuadrado cada desviación, y se suman para todos los "*n*" datos de la muestra, se tiene:

Suma Total de Cuadrados = Suma de Cuadrados + Suma de cuadrados
debido a la regresión de los residuos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 \qquad = \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2 \qquad + \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$

Pero además:

$$\boxed{R^2 = \frac{SCR}{SCT}}$$

Si la expresión (5.7) se divide entre SCT y reemplazamos la expresión (5.8) en (5.7) se tiene:

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}}$$

¿Cómo se interpreta este coeficiente?

Sí:

$\boldsymbol{R^2 \rightarrow 0}$ el modelo no representa adecuadamente a los datos, las variaciones de la variable de respuesta no son explicadas por el modelo de regresión estimado.

$\boldsymbol{R^2 \rightarrow 1}$ el modelo representa adecuadamente a los datos, es decir casi todas las variaciones de la variable de respuesta son explicadas por el modelo de regresión estimado.

Ejemplo 5.2

Calcular e interpretar el coeficiente de determinación para los datos del ejemplo 5.1

$$R^2 = 1 - \frac{1330{,}08618}{2739{,}6924} = 0{,}5145$$

Significa que el 51.45% de las variaciones de los puntajes obtenidos por las PEC en estrategias metodológicas es explicado por los puntajes de estilos de aprendizaje.

La tabla 5.1 muestra los cálculos realizados para obtener el valor del coeficiente de determinación.

Ejemplo 5.3

En muchos casos resulta conveniente utilizar un modelo de regresión lineal simple sin ordenada en el origen, es decir:

$$\boxed{\hat{y} = \hat{\beta}_1 x}$$

Donde:

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

Utilizando los cálculos de la tabla 5.2, se tiene:

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{3887}{937} = 4{,}148}$$

La pendiente es 4,148 y se puede interpretar como el incremento promedio en el puntaje de las estrategias metodológicas de las PEC, debido a sus puntajes de estilo de aprendizaje. El modelo de regresión lineal simple ajustado, sin ordenada en el origen es:

$$\boxed{\hat{y} = 4{,}148x}$$

En este caso el coeficiente de determinación esta dado por:

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

Utilizando los cálculos de la Tabla 5.2 se tiene que:

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{1386{,}830}{17511} = 0{,}9208}$$

Es decir, que el 92,08% de las variaciones de los puntajes obtenidos por las PEC en estrategias metodológicas es explicado por los puntajes de estilos de aprendizaje.

En este caso el modelo de regresión lineal simple sin ordenada en el origen, es el que mejor se ajusta a los datos de las PEC.

5.6.2. Prueba de la significancia de la regresión: Análisis de la varianza

Para probar la significancia del modelo de regresión lineal simple, se tiene la siguiente hipótesis:

Ho: $\beta_1 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq 0$

Para probar las hipótesis utilizaremos la siguiente tabla.

Tabla de análisis de varianza

Fuente de variación	Suma de Cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado Medio	Fc
Regresión	SCR	1	CMR=SCR/1	CMR/CME
Residuos	SCE	n-2	CME=SCE/n-2	
Total	**SCT**	***n*-1**		

Ejemplo 5.4

Para los datos del ejemplo anterior, la tabla de análisis de varianza, proporciona los siguientes resultados:

Tabla de análisis de varianza

Fuente de variación	**Suma de Cuadrados**	**Grados de libertad**	**Cuadrado Medio**	**Fc**
Regresion	1409,60622	1	CMR=1409,60622	39,21207
Residuos	1330,08618	37	CME=35,9482751	
Total	2739,6924	**38**		

Para un nivel de significancia del 5% se tiene que $F_{0.05;1,37} = 4,11$ por lo tanto se rechaza la hipótesis nula, y concluimos que el modelo de regresión lineal es apropiado para explicar los puntajes de estrategias metodológicas a partir de los puntajes de estilos de aprendizaje.

5.7 Adecuación del modelo: Análisis de residuos

El análisis de los residuos permite validar algunos de los supuestos del modelo de regresión lineal como son: linealidad, varianza constante, independencia, normalidad, etc.; es un método efectivo para detectar deficiencias en el modelo, utilizando diversos tipos de gráficos. Los residuos además permiten detectar observaciones que pueden considerarse como discordantes.

El residuo está definido como: $e_i = y_i - \hat{y}_i$

Gráfico 5.5

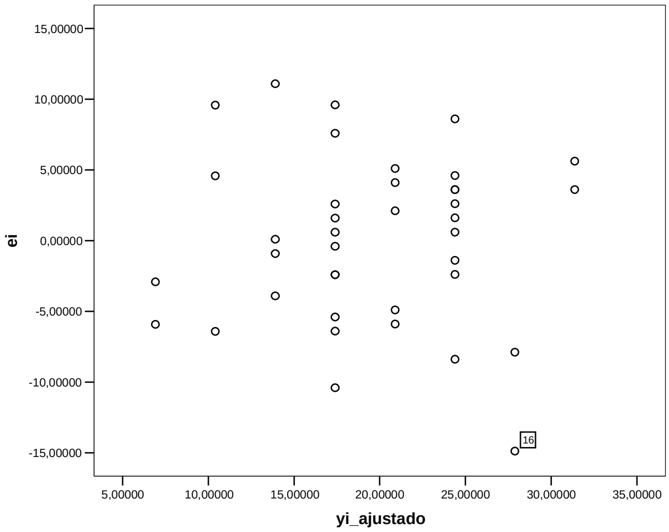


Gráfico de los residuos y los valores ajustados permite detectar si se cumple el supuesto de linealidad y si existen posibles observaciones discordantes.

Gráfico 5.6

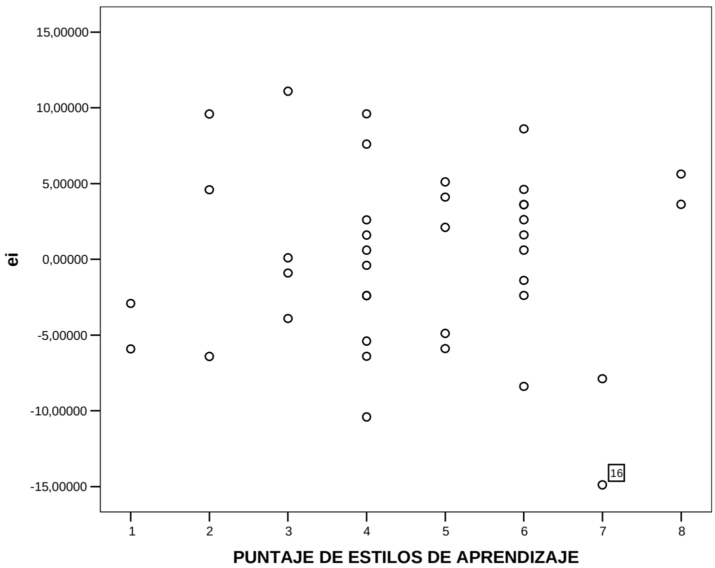


Gráfico de los residuos y las variables regresoras, permite detectar si existe o no linealidad en las variables regresoras.

Los gráficos muestran que la PEC número 16, ubicada en la esquina inferior del lado derecho, puede ser considerada como una observación discordante.

Gráfico 5.7

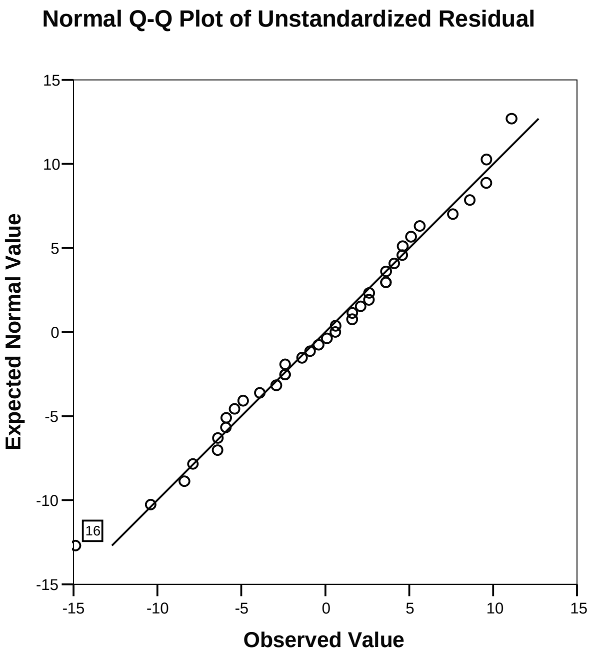


Gráfico de probabilidad normal, permite evaluar si los residuos del modelo tienen distribución normal, así como detectar presencia de datos discordantes.

El gráfico muestra que los residuos del modelo se pueden considerar como aproximadamente simétricos, pero con la presencia de un dato discordante la PEC número 16.

En las siguientes páginas, se muestran las tablas con los resultados utilizados para los ejemplos de esta sección.

Tabla 5.1

Nº	y	x	x*y	x^2	$\hat{Y}$	$e=(y-\hat{y})$	$(y-\hat{y})^2$	$(y - 19.46)^2$
1	19	4	76	16	17,40071	1,59929	2,55773	0,21160
2	28	6	168	36	24,38960	3,61040	13,03495	72,93160
3	25	6	150	36	24,38960	0,61040	0,37258	30,69160
4	28	6	168	36	24,38960	3,61040	13,03495	72,93160
5	23	6	138	36	24,38960	-1,38960	1,93100	12,53160
6	27	6	162	36	24,38960	2,61040	6,81416	56,85160
7	23	5	115	25	20,89516	2,10484	4,43036	12,53160

8	25	4	100	16	17,40071	7,59929	57,74920	30,69160
9	15	4	60	16	17,40071	-2,40071	5,76341	19,89160
10	20	4	80	16	17,40071	2,59929	6,75630	0,29160
11	16	5	80	25	20,89516	-4,89516	23,96257	11,97160
12	26	6	156	36	24,38960	1,61040	2,59337	42,77160
13	15	2	30	4	10,41182	4,58818	21,05142	19,89160
14	12	4	48	16	17,40071	-5,40071	29,16768	55,65160
15	27	4	108	16	17,40071	9,59929	92,14635	56,85160
16	13	7	91	49	27,88405	-14,88405	221,5350	41,73160
17	11	4	44	16	17,40071	-6,40071	40,96910	71,57160
18	18	4	72	16	17,40071	0,59929	0,35915	2,13160
19	26	5	130	25	20,89516	5,10484	26,05941	42,77160
20	14	3	42	9	13,90626	0,09374	0,00879	29,81160
21	25	3	75	9	13,90626	11,09374	123,0710	30,69160
22	20	2	40	4	10,41182	9,58818	91,93325	0,29160
23	33	6	198	36	24,38960	8,61040	74,13891	183,3316
24	35	8	280	64	31,37850	3,62150	13,11527	241,4916
25	22	6	132	36	24,38960	-2,38960	5,71021	6,45160
26	37	8	296	64	31,37850	5,62150	31,60128	307,6516
27	29	6	174	36	24,38960	4,61040	21,25575	91,01160
28	25	5	125	25	20,89516	4,10484	16,84973	30,69160
29	13	3	39	9	13,90626	-0,90626	0,82131	41,73160
30	15	4	60	16	17,40071	-2,40071	5,76341	19,89160
31	15	5	75	25	20,89516	-5,89516	34,75288	19,89160
32	16	6	96	36	24,38960	-8,38960	70,38547	11,97160
33	17	4	68	16	17,40071	-0,40071	0,16057	6,05160
34	1	1	1	1	6,91737	-5,91737	35,01527	340,7716
35	10	3	30	9	13,90626	-3,90626	15,25890	89,49160
36	20	7	140	49	27,88405	-7,88405	62,15827	0,29160
37	7	4	28	16	17,40071	-10,40071	108,1748	155,2516
38	4	2	8	4	10,41182	-6,41182	41,11140	239,0116
39	4	1	4	1	6,91737	-2,91737	8,51105	239,0116

TOTAL	759	179	3887	937			1330,08618	2739,6924

Tabla 5.2

Nº	y	x	x*y	x^2	Ŷ	e=(y - ŷ)	$(y - \hat{y})^2$	y^2
1	19	4	76	16	16,59338	2,40662	5,79180	361
2	28	6	168	36	24,89007	3,10993	9,67164	784
3	25	6	150	36	24,89007	0,10993	0,01208	625
4	28	6	168	36	24,89007	3,10993	9,67164	784
5	23	6	138	36	24,89007	-1,89007	3,57238	529
6	27	6	162	36	24,89007	2,10993	4,45178	729
7	23	5	115	25	20,74173	2,25827	5,09979	529
8	25	4	100	16	16,59338	8,40662	70,67121	625
9	15	4	60	16	16,59338	-1,59338	2,53887	225
10	20	4	80	16	16,59338	3,40662	11,60504	400
11	16	5	80	25	20,74173	-4,74173	22,48399	256
12	26	6	156	36	24,89007	1,10993	1,23193	676
13	15	2	30	4	8,29669	6,70331	44,93434	225
14	12	4	48	16	16,59338	-4,59338	21,09917	144
15	27	4	108	16	16,59338	10,40662	108,2977	729
16	13	7	91	49	29,03842	-16,03842	257,2309	169
17	11	4	44	16	16,59338	-5,59338	31,28593	121
18	18	4	72	16	16,59338	1,40662	1,97857	324
19	26	5	130	25	20,74173	5,25827	27,64941	676
20	14	3	42	9	12,44504	1,55496	2,41791	196

Nº	y	x	x*y	x^2	$\hat{Y}$	$e=(y - \hat{y})$	$(y - \hat{y})^2$	y^2
21	25	3	75	9	12,44504	12,55496	157,6271	625
22	20	2	40	4	8,29669	11,70331	136,9674	400
23	33	6	198	36	24,89007	8,10993	65,77089	1089
24	35	8	280	64	33,18677	1,81323	3,28782	1225
25	22	6	132	36	24,89007	-2,89007	8,35253	484
26	37	8	296	64	33,18677	3,81323	14,54075	1369
27	29	6	174	36	24,89007	4,10993	16,89149	841
28	25	5	125	25	20,74173	4,25827	18,13287	625
29	13	3	39	9	12,44504	0,55496	0,30798	169
30	15	4	60	16	16,59338	-1,59338	2,53887	225
31	15	5	75	25	20,74173	-5,74173	32,96745	225
32	16	6	96	36	24,89007	-8,89007	79,03343	256
33	17	4	68	16	16,59338	0,40662	0,16534	289
34	1	1	1	1	4,14835	-3,14835	9,91208	1
35	10	3	30	9	12,44504	-2,44504	5,97821	100
36	20	7	140	49	29,03842	-9,03842	81,69304	400
37	7	4	28	16	16,59338	-9,59338	92,03300	49
38	4	2	8	4	8,29669	-4,29669	18,46156	16
39	4	1	4	1	4,14835	-0,14835	0,02201	16
TOTAL	**759**	**179**	**3887**	**937**			**1386,380**	**17511**

Ejercicios propuestos

5.1. La comprensión lectora en alumnos del tercer grado de secundaria, se va a estudiar en relación a número de veces que asiste semanalmente a la biblioteca de su escuela. Analizar si ambas variables guardan alguna relación, si es así resumir el comportamiento conjunto de ambas variables y si es posible predecir el puntaje de comprensión lectora a partir del número de veces que asiste un alumno a la biblioteca para hacer consultas.

Los datos obtenidos de una muestra de 21 alumnos:

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
X	2	3	1	4	5	0	5	3	1	4	2	0	4	3	5	3	1	4	2	3	5
Y	12	10	9	10	13	9	14	13	8	11	9	11	15	9	11	12	10	12	12	11	12

5.2. Los teóricos monetaristas sostienen que el Producto Nacional Bruto (billones de dólares) está fundamentalmente determinado por la oferta monetaria (billones de dólares).

Nº	**PNB**	**OFERTA MONETARIA**
1	1127,0	237,5
2	1156,7	2423
3	1181,4	247,4
4	1219,4	252,9
5	1365,0	257,6
6	1287,8	261,7
7	1319,7	265,3
8	1352,7	268,7
9	1370,9	272,7
10	1391,0	276,5
11	1424,4	279,4
12	1441,3	282,2
13	1433,6	282,6
14	1460,6	287,8

a) Trace el diagrama de dispersión de los datos. Interprete.

b) ¿Cuál es el modelo estimado para estos datos?

c) Interprete los parámetros estimados.

d) ¿El modelo representa adecuadamente la relación entre el PNB y la oferta monetaria?

e) ¿El modelo de regresión obtenido en (b) es apropiado para las variables bajo estudio?

5.3 La esperanza de vida femenina parece ser el factor principal en la mortalidad infantil en los países de Latinoamérica, el informe proporcionado por la OMS en 1990, muestra lo siguiente:

País	**Mortali-dad infantil**	**Esperanza de vida femenina**
Bolivia	75,0	64
Brasil	66,0	67
Colombia	28,0	75
Cuba	10,2	78
Chile	14,6	78
Ecuador	39,0	73
El Salvador	41,0	69
Guatemala	57,0	67
Haití	109,0	47
Honduras	45,0	70
México	35,0	77
Nicaragua	52,5	67
Panamá	16,5	78
Paraguay	25,2	75
Perú	54,0	67
Rep. Dominicana	51,5	70
Uruguay	17,0	77
Venezuela	28,0	76

a) Trace el diagrama de dispersión de los datos. Interprete.

b) ¿Obtenga el modelo estimado para estos datos?

c) Interprete los parámetros estimados.

d) ¿Qué porcentaje de la variabilidad de la mortalidad infantil es explicada por la esperanza de vida femenina?

e) ¿El modelo de regresión obtenido en (b) es apropiado para las variables bajo estudio? Justifique su respuesta.

f) Si la esperanza de vida femenina fuera de 80 en un país latinoamericano ¿Cuánto será la mortalidad infantil?